MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
UNIVERSITATEA PETROL – GAZE DIN PLOIEŞTI

FACULTATEA DE LITERE ȘI ȘTIINȚE
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ
SPECIALIZAREA MATEMATIC
CURSURI DE ZI

Vizat	**Aprobat,**
Facultatea	**Director de departament,**
(semnătura şi ştampila)	**CONF. DR. GABRIELA MOISE**

LUCRARE DE LICENŢĂ

TEMA: CALCULUL APROXIMATIV AL DERIVATELOR DE ORDIN SUPERIOR CÂND SE CUNOAȘTE VALOAREA FUNCȚIEI ÎN CINCI PUNCTE NEECHIDISTANTE

Conducător ştiinţific:

CONF. MAT. DR. ING. DINU TĂNASE

Absolventă:

STĂNESCU N. GEORGETA

PLOIEŞTI

2013

UNIVERSITATEA PETROL – GAZE DIN PLOIEŞTI
FACULTATEA DE LITERE ŞI ȘTIINȚE
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ
CURSURI DE ZI

Aprobat , Director de departament, CONF. DR. GABRIELA MOISE	Declar pe propria răspundere că voi elabora personal lucrarea de licență și nu voi folosi alte materiale documentare în afara celor prezentate la capitolul "Bibliografie". Semnătură,

DATELE INIȚIALE PENTRU LUCRARE LICENȚĂ

Lucrarea a fost dat studentei: Stănescu N. Georgeta

1. Tema lucrării este: Calculul aproximativ al derivatelor de ordin superior când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante
2. Data eliberării temei: 20.10.2012
3. Tema a fost primită pentru îndeplinire la data: 20.10.2012
4. Termenul pentru predarea lucrării: 01.07.2013
5. Elementele inițiale pentru lucrare sunt:

- Titlul temei
- Bibliografia

6. Enumerarea problemelor care vor fi dezvoltate:

- Introducere
- Cap.I. Derivatele unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte echidistante
- Cap.II. Derivatele unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte neechidistante
- Cap.III. Derivatele unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante
- Cap.IV. Calculul aproximativ al derivatelor unei funcții folosind polinoamele de interpolare când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte neechidistante
- Cap.V. Calculul aproximativ al derivatelor unei funcții folosind polinoamele de interpolare când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante
- Cap.VI. Calculul erorilor pentru derivatele unei funcții când se știe valoarea funcției în cinci puncte neechidistante
- Cap.VII. Aplicație
- Concluzii
- Bibliografie

7. Enumerarea materialului grafic (acolo unde este cazul):……………………….
8. Consultații pentru lucrare, cu indicarea părților din proiect care necesită consultarea: ……………………………………………………………………

Conducător științific: CONF. DR. MAT. ING. DINU TĂNASE

Studentă: STĂNESCU N. GEORGETA

UNIVERSITATEA PETROL – GAZE DIN PLOIEŞTI
FACULTATEA DE LITERE ŞI ŞTIINȚE
DOMENIUL: MATEMATICĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ
CURSURI DE ZI

APRECIERE		
privind activitatea absolventului: Stănescu N. Georgeta		
în elaborarea proiectului de diplomă / lucrării de licenţă / disertaţie cu tema:		
Calculul aproximativ al derivatelor de ordin superior când se cunoaște valoarea funcției în		
cinci puncte neechidistante		
Nr. crt.	CRITERIUL DE APRECIERE	CALIFICATIV
1.	Documentare, prelucrarea informaţiilor din bibliografie	Foarte bine
2.	Colaborarea ritmică şi eficientă cu conducătorul temei proiectului de diploma /lucrării de licenţă	Excelent
3.	Corectitudinea calculelor, programelor, schemelor, desenelor, diagramelor şi graficelor	Foarte bine
4.	Cercetare teoretică, experimentală şi realizare practică	Foarte bine
5.	Elemente de originalitate (dezvoltări teoretice sau aplicaţii noi ale unor teorii existente, produse informatice noi sau adaptate, utile în aplicaţiile inginereşti)	Foarte bine
6.	Capacitate de sinteză şi abilităţi de studiu individual	Foarte bine
CALIFICATIV FINAL		Foarte bine

Calificativele pot fi: *nesatisfăcător / satisfăcător / bine / foarte bine / excelent*.

Comentarii privind calitatea lucrării:

- Tema lucrării a fost abordată complet
- A obținut rezultate teoretice noi care nu se află în literatura de specialitate
- Rezultatele teoretice sunt folosite în rezolvarea ecuațiilor și sistemelor diferențiale la Metoda rețelelor
- Este concisă și exactă în calcule.

Data, 26.06.2013 Conducător științific,

Conf.mat.dr.ing. Dinu Tănase

INTRODUCERE

Această lucrare prezintă formele generale al derivatelor până la ordinul patru inclusiv pentru calculul aproximativ al derivatelor de ordin superior când se cunoaște valoarea funcției în trei, cinci puncte echidistante și neechidistante.

Deoarece în modelarea matematică pe calculator nu se poate calcula derivata unei funcții cu ajutorul limitei, atunci se caută să se obțină expresii care să aproximeze derivatele de ordin întâi, doi, trei, patru, ale funcției f(x).

Pentru calculul aproximativ al derivatelor unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte echidistante sau neechidistante și în cinci puncte echidistante, aceste formule sunt prezentate în cursurile de analiză numerică, iar în cazul când se cunoaște valoarea funcției în cinci pincte neechidistante, această problemă nu este abordată datorită volumului mare de calcule.

Rezolvarea acestei probleme și folosirea rezultatelor în aplicații face obiectul acestei lucrări de diplomă.

Exprimarea derivatelor unei funcții într-un punct x_0 când se cunoaște valoarea funcției în mai multe puncte apropiate punctului x_0 are o importanță deosebită în rezolvarea aproximativă a ecuațiilor diferențiale de cel mult ordinul cinci sau a ecuațiilor cu derivate parțiale când se folosește metoda diferențelor finite sau metoda rețelelor.

Pentru a pune în evidență formule de calcul aproximativ a derivatelor de ordin superior, lucrarea conține un model de rezolvare a unei funcții mai întâi prin derivatele exacte ale funcției, apoi cu ajutorul formulelor de calcul aproximativ al derivatelor numerice când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte echidistante sau neechidistante și în cinci puncte echidistante sau neechidistante. Vom face comparația print-un tabel final care conține toate valorile obținute, pentru a observa care ne dă cele mai mici erori de calcul.

CUPRINS

INTRODUCERE pag.4

CAPITOLUL I
DERIVATELE UNEI FUNCȚII CÂND SE CUNOAȘTE VALOAREA FUNCȚIEI ÎN TREI PUNCTE ECHIDISTANTE..................................pag.8
1.1. Calculul aproximativ al derivatelor unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte echidistante pag.8
1.2. Eroarea de trunchiere a unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte echidistante pag.10

CAPITOLUL II
DERIVATELE UNEI FUNCȚII CÂND SE CUNOAȘTE VALOAREA FUNCȚIEI ÎN TREI PUNCTE NEECHIDISTANTE...........................pag.12
2.1. Calculul aproximativ al derivatelor unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte neechidistante....pag.12
2.2. Eroarea de trunchiere pentru derivatele unei funcții calculate aproximativ când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte neechidistante...pag.14
2.2.1. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul întâi...pag.15
2.2.2. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul doi...pag.16

CAPITOLUL III
DERIVATELE UNEI FUNCȚII CÂND SE CUNOAȘTE VALOAREA FUNCȚIEI ÎN CINCI PUNCTE ECHIDISTANTE.............................pag.17
3.1. Calculul aproximativ al derivatelor unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante....pag.17
3.2. Eroarea de trunchiere pentru derivatele unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante....pag.23
3.2.1. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul întâi..pag.23

3.2.2. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul doi..pag.26
3.2.3. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul trei..pag.28
3.2.4. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul patru..pag.29

CAPITOLUL IV
CALCULUL APROXIMATIV AL DERIVATELOR UNEI FUNCȚII FOLOSIND POLINOAMELE DE INTERPOLARE CÂND SE CUNOAȘTE VALOAREA FUNCȚIEI ÎN TREI PUNCTE NEECHIDISTANTE...pag.31

CAPITOLUL V
CALCULUL APROXIMATIV AL DERIVATELOR UNEI FUNCȚII FOLOSIND POLINOAMELE DE INTERPOLARE CÂND SE CUNOAȘTE VALOAREA FUNCȚIEI ÎN CINCI PUNCTE NEECHIDISTANTE...pag.33
5.1. Calculul aproximativ al derivatei de ordinul întâi a unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante..pag.34
5.2. Calculul aproximativ al derivatei de ordinul doi a unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante..pag.37
5.3. Calculul aproximativ al derivatei de ordinul trei a unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante..pag.39
5.4. Calculul aproximativ al derivatei de ordinul patru a unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante..pag.40

CAPITOLUL VI
CALCULUL ERORILOR PENTRU DERIVATELE UNEI FUNCȚII CÂND SE ȘTIE VALOAREA FUNCȚIEI ÎN CINCI PUNCTE NEECHIDISTANTE...pag.41

6.1. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul întâi.......pag.42
6.2. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul doi.........pag.45
6.3. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul trei........pag.46
6.4. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul patru......pag.49

CAPITOLUL VII
APLICAȚIE...pag.51
7.1 Calculul derivatei exacte a funcției...................................pag.51
7.2 Derivarea numerică prin trei puncte echidistante.............pag.51
7.3 Derivarea numerică prin trei puncte neechidistante...........pag.52
7.4 Derivarea numerică prin cinci puncte echidistante............pag.53
7.5 Derivarea numerică prin cinci puncte neechidistante........pag.54
7.6 Tabelul de valori...pag.56
CONCLUZII...pag.57
BIBLIOGRAFIE..pag.58

CAPITOLUL I
Derivatele unei funcţii când se cunoaşte valoarea funcţiei în trei puncte echidistante

1.1 Calculul aproximativ al derivatelor unei funcţii când se cunoaşte valoarea funcţiei în trei puncte echidistante

Fie punctele $x_{-1}<x_0<x_1$ cu $x_{-1}=x_0-h$, $x_1=x_0+h$, unde $h>0$.

Trebuie să aflăm derivata de ordin întâi, notăm cu $f'(x_0)$.

Știm valoarea funcției în punctele x_{-1}, x_0, x_1, adică $f(x_{-1})$, $f(x_0)$, $f(x_1)$.

Derivata de ordin întâi o scriem sub forma:

$$f'(x_0)=\alpha f(x_{-1})+\beta f(x_0)+\gamma f(x_1), \tag{1}$$

unde α,β,γ sunt constante care urmează să le calculăm.

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2 \tag{1'}$$

sau

$$f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2 \tag{1''}$$

Calculăm $f(x_{-1})$, $f(x_0)$, $f(x_1)$ și se obține sistemul:

$$\begin{cases} f(x_{-1})=b_0+b_1(x_0-h-x_0)+b_2(x_0-h-x_0)^2 \\ f(x_o)=b_0+b_1(x_o-x_0)+b_2(x_0-x_0)^2 \\ f(x_1)=b_0+b_1(x_1+h-x_0)+b_2(x_1+h-x_0)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_{-1})=b_0-b_1h+b_2h^2 \\ f(x_o)=b_0 \\ f(x_1)=b_0+b_1h+b_2h^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -b_1h+b_2h^2=f(x_{-1})-f(x_0) & \text{(a)} \\ b_0=f(x_o) & \text{(b)} \\ b_1h+b_2h^2=f(x_1)-f(x_0) & \text{(c)} \end{cases}$$

Dacă adunăm (a) și (b) avem:

$$\begin{cases} -b_1h+b_2h^2=f(x_{-1})-f(x_0) \\ b_1h+b_2h^2=f(x_1)-f(x_0) \end{cases}$$

$$2b_2h^2=f(x_{-1})-2f(x_0)+f(x_1) \Rightarrow b_2=\frac{f(x_{-1})-2f(x_0)+f(x_1)}{2h^2}$$

Dacă: $\begin{cases} b_2=\dfrac{f(x_{-1})-2f(x_0)+f(x_1)}{2h^2} \\ b_1h+b_2h^2=f(x_1)-f(x_0) \Rightarrow b_1=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)-b_2h^2}{h} \Rightarrow \end{cases}$

$b_1=\dfrac{-f(x_{-1})+f(x_1)}{2h}$

Dacă: $f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2$

$f'(x)=b_1+2b_2(x-x_0)$

$f'(x_0)=b_1+2b_2(x_0-x_0) \Rightarrow f'(x_o)=b_1=\dfrac{-f(x_{-1})+f(x_1)}{2h}$

Deci, $\bar{f}'(x_o)=b_1=\dfrac{-f(x_{-1})}{2h}+\dfrac{f(x_1)}{2h}$ (2)

Din (1) si (2),rezultă că:

$$\begin{cases} \alpha=-\dfrac{1}{2h} \\ \beta=0 \\ \gamma=\dfrac{1}{2h} \end{cases}$$

Pentru a calcula derivata de ordinul doi, avem:

$$\bar{f}''(x_0)=\alpha_1 f(x_{-1})+\beta_1 f(x_0)+\gamma_1 f(x_1),$$

$$f''(x)=2b_2=2\times\frac{f(x_{-1})-2f(x_0)+f(x_1)}{2h^2} \Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{f(x_{-1})-2f(x_0)+f(x_1)}{h^2}$$

$$\bar{f}''(x_0)=\frac{f(x_{-1})}{h^2}-\frac{2f(x_0)}{h^2}+\frac{f(x_1)}{h^2} \qquad (3)$$

Deci, din relația (3) , rezultă:

$\alpha_1=\dfrac{1}{h^2}$ $\beta_1=-\dfrac{2}{h^2}$ $\gamma_1=\dfrac{1}{h^2}$

1.2 Eroarea de trunchiere a unei funcţii când se cunoaşte valoarea funcţiei în trei puncte echidistante

Pentru a calcula eroarea de trunchiere, folosim formula lui Taylor pentru $f \in C^3(a,b)$ și x_0 care aparține unui interval (a,b).

Pentru n=2, avem:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3,$$

unde $\xi \in (x_0,x)$ (4)

Calculăm valoarea funcției în punctele $x_{-1}=x_0-h$, x_0, $x_1=x_0+h$ folosind formula (4).

$$f(x_{-1})=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-h-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-h-x_0)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(x_0-h-x_0)^3$$

$\Rightarrow$

$$f(x_{-1})=f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2 f''(x_0)}{2!}-\frac{h^3 f'''(\xi_1)}{3!} \tag{5}$$

$$f(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-x_0)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(x_0-x_0)^3 \Rightarrow$$

$$f(x_0)=f(x_0) \tag{6}$$

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_0+h-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0+h-x_0)^2+\frac{f'''(\xi_3)}{3!}(x_0+h-x_0)^3$$

$\Rightarrow$

$$f(x_1)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2 f''(x_0)}{2!}+\frac{h^3 f'''(\xi_3)}{3!} \tag{7}$$

unde $\xi_1 \in (x_{-1},x_0)$, $\xi_2 \in \{x_0\}$ si $\xi_3 \in (x_0,x_1)$.

Folosind formula (2) și ținând cont de formulele (5) si (7), rezultă că:

$$\overline{f'}(x_0)=\frac{-f(x_{-1})}{2h}+\frac{f(x_1)}{2h}=\frac{-1}{2h}\left[f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2f''(x_0)}{2!}-\frac{h^3f'''(\xi_1)}{3!}\right]+\frac{1}{2h}\left[f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2f''(x_0)}{2!}+\frac{h^3f'''(\xi_3)}{3!}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{f}'(x_0)=f'(x_0)+\frac{h^2}{12}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_3)\right] \tag{8}$$

Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul întâi este:

$$e_T=\left|\bar{f}'(x_0)-f'(x_0)\right|=\left|f'(x_0)+\frac{h^2}{12}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_3)\right]-f'(x_0)\right|\Rightarrow$$

$$e_T=\frac{h^2}{12}\left|f'''(\xi_1)+f'''(\xi_3)\right| \tag{9}$$

Folosind formula (3) și ținând cont de (5) si (7), rezultă:

$$\bar{f}''(x_0)=\frac{f(x_{-1})}{h^2}-\frac{2f(x_0)}{h^2}+\frac{f(x_1)}{h^2}=\frac{1}{h^2}\left[f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2f''(x_0)}{2!}-\frac{h^3f'''(\xi_1)}{3!}\right]-\frac{2f(x_0)}{h^2}$$

$$+\frac{1}{h^2}\left[f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2f''(x_0)}{2!}+\frac{h^3f'''(\xi_3)}{3!}\right]\Rightarrow$$

$$\bar{f}''(x_0)=f''(x_0)+\frac{h}{6}\left[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_3)\right] \tag{10}$$

Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul doi este:

$$e_T=\left|\bar{f}''(x_0)-f''(x_0)\right|=\left|f''(x_0)+\frac{h}{6}\left[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_3)\right]-f''(x_0)\right|\Rightarrow$$

$$e_T=\frac{h}{6}\left|f'''(\xi_1)-f'''(\xi_3)\right| \le \frac{h}{6}\left|f^{(4)}(\xi)\right|(\xi_3-\xi_1)\le\frac{h}{6}\times 2h\left|f^{(4)}(\xi)\right|\le\frac{h^2}{3}M$$

, unde $\xi_3-\xi_1<(x_1-x_{-1})=2h$

Deci, eroarea este:

$$e_T\le\frac{h^2}{3}M \quad \text{, unde} \quad M=\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right| \tag{10'}$$

CAPITOLUL II
Derivatele unei funcţii când se cunoaşte valoarea funcţiei în trei puncte neechidistante

2.1. Calculul aproximativ al derivatelor unei funcţii când se cunoaşte valoarea funcţiei în trei puncte neechidistante

Fie punctele $x_{-1}<x_0<x_1$ cu $x_{-1}=x_0-h_1$, $x_1=x_0+h_2$, unde $h_1,h_2>0$.

Știm valoarea funcției în punctele x_{-1}, x_0, x_1, adică $f(x_{-1})$, $f(x_0)$, $f(x_1)$, unde

$$f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2 \tag{11}$$

este o funcție de gradul doi, cu b_o,b_1,b_2 coeficienții funcției.

Pentru determinarea derivatei de ordinul întâi a unei funcţii când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte neechidistante, trebuie să calculăm α,β,γ care sunt coeficienții derivatei de ordinal întâi:

$$\bar{f}'(x_0)=\alpha f(x_{-1})+\beta f(x_0)-\gamma f(x_1) \tag{12}$$

Calculăm $f(x_{-1})$, $f(x_0)$, $f(x_1)$ și se obține sistemul:

$$\begin{cases} f(x_{-1})=b_0+b_1(x_0-h_1-x_0)+b_2(x_0-h_1-x_0)^2 \\ f(x_o)=b_0+b_1(x_o-x_0)+b_2(x_0-x_0)^2 \\ f(x_1)=b_0+b_1(x_1+h_2-x_0)+b_2(x_1+h_2-x_0)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_{-1})=b_0-b_1h_1+b_2h_1^2 \\ f(x_o)=b_0 \\ f(x_1)=b_0+b_1h_2+b_2h_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -b_1h_1+b_2h_1^2=f(x_{-1})-f(x_0) & \text{(a)} \\ b_0=f(x_o) & \text{(b)} \\ b_1h_2+b_2h_2^2=f(x_1)-f(x_0) & \text{(c)} \end{cases}$$

Dacă adunăm (a) și (c) avem:

$$\begin{cases} -b_1h_1+b_2h_1^{\,2}= f(x_{-1})- f(x_0) & /h_2 \\ b_1h_2+b_2h_2^{\,2}=f(x_1) - f(x_0) & /h_1 \end{cases}$$

$$b_2h_1h_2(h_1 +h_2)= h_2f(x_{-1})- (h_1+ h_2)f(x_0)+ h_1f(x_1) \Rightarrow$$

$$b_2=\frac{1}{h_1(h_1+h_2)}f(x_{-1})-\frac{1}{h_1h_2}f(x_0)+\frac{1}{h_2(h_1+h_2)}f(x_1) \tag{13}$$

Dacă: $\begin{cases} b_2=\frac{1}{h_1(h_1+h_2)}f(x_{-1})-\frac{1}{h_1h_2}f(x_0)+\frac{1}{h_2(h_1+h_2)}f(x_1) \\ b_1h_2+b_2h_2^{\,2}=f(x_1) - f(x_0) \Rightarrow b_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)-b_2h_2^2}{h_2} \end{cases} \Rightarrow$

$$b_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_2}-h_2\left[\frac{1}{h_1(h_1+h_2)}f(x_{-1})-\frac{1}{h_1h_2}f(x_0)+\frac{1}{h_2(h_1+h_2)}f(x_1)\right]\Rightarrow$$

$$b_1=-\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)}f(x_{-1})+\frac{h_2-h_1}{h_1h_2}f(x_0)+\frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)}f(x_1) \tag{14}$$

Dacă: $f(x)=b_0+ b_1 (x-x_0)+b_2(x-x_0)^2$

$$f'(x)=b_1+ 2b_2 (x-x_0) \tag{14'}$$

$$f'(x_0)=b_1+ 2b_2 (x_0-x_0) \Rightarrow f'(x_o)=b_1 \tag{15}$$

Din (14) și (15) $\Rightarrow$ $\bar{f}'(x_o)= -\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)}f(x_{-1})+\frac{h_2-h_1}{h_1h_2}f(x_0)+\frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)}f(x_1)$ (16)

Din (12) si (16),rezultă că:

$$\begin{cases} \alpha=-\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)} \\ \beta=\frac{h_2-h_1}{h_1h_2} \\ \gamma=\frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)} \end{cases}$$

Pentru a calcula derivata de ordinul doi, avem:

$$\bar{f}'(x_0)=\alpha_1f(x_{-1})+\beta_1f(x_0)-\gamma_1f(x_1) \tag{17}$$

Din (14′) $\Rightarrow$ f''(x)= 2b$_2$ =$2\left[\frac{1}{h_1(h_1+h_2)}f(x_{-1})-\frac{1}{h_1h_2}f(x_0)+\frac{1}{h_2(h_1+h_2)}f(x_1)\right]\Rightarrow$

$$\bar{f}''(x_0)=\frac{2}{h_1(h_1+h_2)}f(x_{-1})-\frac{2}{h_1h_2}f(x_0)+\frac{2}{h_2(h_1+h_2)}f(x_1)$$

(18)

Deci, din relația (17) și (18) , rezultă:

$$\alpha_1=\frac{2}{h_1(h_1+h_2)} \qquad \beta_1=-\frac{2}{h_1h_2} \qquad \gamma_1=\frac{2}{h_2(h_1+h_2)}$$

2.2. Eroarea de trunchiere pentru derivatele unei funcții calculate aproximativ când se cunoaşte valoarea funcției în trei puncte neechidistante

Pentru a calcula eroarea de trunchiere, folosim formula lui Taylor pentru $f\in C^3(a,b)$ și x_0 care aparține unui interval (a,b).

Pentru n=2, avem:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3,$$

unde $\xi\in(x_0,x)$ (19)

Calculăm valoarea funcției în punctele $x_{-1}=x_0-h_1$, x_0, $x_1=x_0+h_2$ folosind formula (19).

$$f(x_{-1})=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-h_1-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-h_1-x_0)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(x_0-h_1-x_0)^3\Rightarrow$$

$$f(x_{-1})=f(x_0)-h_1f'(x_0)+\frac{h_1^2}{2!}f''(x_0)-\frac{h_1^3}{3!}f'''(\xi_1) \qquad (20)$$

$$f(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-x_0)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(x_0-x_0)^3\Rightarrow$$

$$f(x_0)=f(x_0) \qquad (21)$$

$$f(x_1)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x_0+h_2-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x_0+h_2-x_0\right)^2+\frac{f'''\left(\xi_3\right)}{3!}\left(x_0+h_2-x_0\right)^3 \Rightarrow$$

$$f(x_1)=f\left(x_0\right)+h_2f'\left(x_0\right)+\frac{h_2^{\,2}f''\left(x_0\right)}{2!}+\frac{h_2^{\,3}f'''\left(\xi_3\right)}{3!} \tag{22}$$

unde $\xi_1 \in (x_{-1},x_0)$, $\xi_2 \in \left\{x_0\right\}$ si $\xi_3 \in (x_0,x_1)$.

2.2.1.Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul întâi

Folosind formula (16) și ținând cont de formulele (20),(21) și (22), rezultă că:

$$\bar{f}'\left(x_0\right)=-\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)}\left[f\left(x_0\right)-h_1f'\left(x_0\right)+\frac{h_1^2}{2!}f''\left(x_0\right)-\frac{h_1^3}{3!}f'''\left(\xi_1\right)\right]+\frac{h_2-h_1}{h_1h_2}f\left(x_0\right)+$$

$$+\frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)}\left[f\left(x_0\right)+h_2f'\left(x_0\right)+\frac{h_2^{\,2}f''\left(x_0\right)}{2!}+\frac{h_2^{\,3}f'''\left(\xi_3\right)}{3!}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{f}'(x_0)=f'\left(x_0\right)+\frac{h_1h_2}{3!(h_1+h_2)}\left[h_1f'''\left(\xi_1\right)+h_2f'''\left(\xi_3\right)\right] \tag{23}$$

Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul întâi este:

$$e_T=\left|\bar{f}'(x_0)-f'(x_0)\right|=\left|f'\left(x_0\right)+\frac{h_1h_2}{3!(h_1+h_2)}\left[h_1f'''\left(\xi_1\right)+h_2f'''\left(\xi_3\right)\right]-f'\left(x_0\right)\right|\Rightarrow$$

$$e_T=\frac{h_1h_2}{3!(h_1+h_2)}\left|h_1f'''\left(\xi_1\right)+h_2f'''\left(\xi_3\right)\right| \le \frac{h_1h_2}{3!(h_1+h_2)}(h_1M+h_2M)\le\frac{h_1h_2}{6}M$$

Deci,

$$e_T \le \frac{h_1h_2}{6}M \quad \text{,unde} \quad M=\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(3)}\left(x\right)\right| \tag{24}$$

Caz particular, $h_1=h_2=h \Rightarrow$

$$e_T \le \frac{h^2}{6}M \quad \text{, unde} \quad M=\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(3)}\left(x\right)\right| \tag{24'}$$

2.2.2. Eroarea de trunchiere pentru derivate de ordinal doi

Folosind formula (18) și ținând cont de (20),(21) și (22), rezultă:

$$\bar{f}''(x_0)'' = \frac{2}{h_1(h_1+h_2)}\left[f(x_0) - h_1 f'(x_0) + \frac{h_1^2}{2!}f''(x_0) - \frac{h_1^3}{3!}f'''(\xi_1)\right] - \frac{2}{h_1 h_2}f(x_0) +$$

$$+\frac{2}{h_2(h_1+h_2)}\left[f(x_0) + h_2 f'(x_0) + \frac{h_2{}^2 f''(x_0)}{2!} + \frac{h_2{}^3 f'''(\xi_3)}{3!}\right] \Rightarrow$$

$$\bar{f}''(x_0) = f''(x_0) + \frac{1}{3(h_1+h_2)}\left[h_2^2 f'''(\xi_3) - h_1^2 f'''(\xi_1)\right] \tag{25}$$

Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul doi este:

$$e_T = \left|\bar{f}''(x_0) - f''(x_0)\right| = \left|f''(x_0) + \frac{1}{3(h_1+h_2)}\left[h_2^2 f'''(\xi_3) - h_1^2 f'''(\xi_1)\right] - f''(x_0)\right| \Rightarrow$$

$$e_T = \frac{1}{3(h_1+h_2)}\left|h_2^2 f'''(\xi_3) - h_1^2 f'''(\xi_1)\right| \tag{26}$$

unde $\xi_1 \in (x_{-1}, x_0)$, $\xi_3 \in (x_0, x_1)$.

Caz particular,

$h_1 = h_2 = \frac{h}{2} \Rightarrow \quad e_T \le \frac{h^2}{6h}\left|f'''(\xi_3) - f'''(\xi_1)\right| \le \frac{h^2}{6h}\left|f^{(4)}(\xi)\right|(\xi_3 - \xi_1) \le \frac{h^2}{6h} \times h\left|f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{h^2}{6}M$

, unde $\xi_3 - \xi_1 < (x_1 - x_{-1}) = h$

Deci, eroarea este:

$$e_T \le \frac{h^2}{6}M \quad \text{, unde} \quad M = \sup_{x \in [a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right| \tag{27}$$

CAPITOLUL III
Derivatele unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante

3.1. Calculul aproximativ al derivatelor unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante

Fie punctele $x_{-2}< x_{-1}<x_0<x_1 <x_2$ cu $x_{-2}=x_0-2h$, $x_{-1}=x_0-h$, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$ unde $h>0$.

Derivata de ordin întâi o scriem sub forma:

$$\bar{f}'(x_0)= af(x_{-2})+bf(x_{-1})+cf(x_0) +df(x_1)+ef(x_2) \qquad (1)$$

unde α,β,γ sunt constante care urmează să le calculăm,atunci cand stim valoarea funcției în cele cinci puncte echidistante , adică $f(x_{-2})$,$f(x_{-1})$, $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Presupunem că:

$$f(x)=t_0+ t_1 (x-x_0)+t_2(x-x_0)^2+t_3(x-x_0)^3+t_4(x-x_0)^4 \qquad (2)$$

este o functie de gradul patru.

Calculăm:

$f(x_{-2})= t_0+ t_1 (x_{-2} -x_0)+t_2(x_{-2} -x_0)^2+t_3(x_{-2} -x_0)^3+t_4(x_{-2} -x_0)^4= t_0+ t_1 (x_0-2h -x_0)+t_2(x_0-2h -x_0)^2+t_3(x_0-2h -x_0)^3+t_4(x_0-2h -x_0)^4= t_0-2h\, t_1 +4h^2 t_2-8h^3 t_3+16h^4 t_4$

$$f(x_{-2})=t_0-2h\, t_1 +4h^2 t_2-8h^3 t_3+16h^4 t_4 \qquad (3)$$

$f(x_{-1})= t_0+ t_1 (x_{-1} -x_0)+t_2(x_{-1} -x_0)^2+t_3(x_{-1} -x_0)^3+t_4(x_{-1} -x_0)^4= t_0+ t_1 (x_0-h -x_0)+t_2(x_0-h -x_0)^2+t_3(x_0-h -x_0)^3+t_4(x_0-h -x_0)^4= t_0-h\, t_1 +h^2 t_2-h^3 t_3+h^4 t_4$

$$f(x_{-1})=t_0-h\, t_1 +h^2 t_2-h^3 t_3+h^4 t_4 \qquad (4)$$

$f(x_1)= t_0+ t_1 (x_1 -x_0)+t_2(x_1 -x_0)^2+t_3(x_1 -x_0)^3+t_4(x_1 -x_0)^4= t_0+ t_1 (x_0+h -x_0)+t_2(x_0+h -x_0)^2+t_3(x_0+h -x_0)^3+t_4(x_0+h -x_0)^4= t_0+h\, t_1 +h^2 t_2+h^3 t_3+h^4 t_4$

$f(x_1)=t_0+h\,t_1+h^2\,t_2+h^3\,t_3+h^4\,t_4$ (5)

$f(x_2)=t_0+t_1(x_2-x_0)+t_2(x_2-x_0)^2+t_3(x_2-x_0)^3+t_4(x_2-x_0)^4=t_0+t_1(x_0+2h-x_0)+t_2(x_0+2h-x_0)^2+t_3(x_0+2h-x_0)^3+t_4(x_0+2h-x_0)^4=t_0+2h\,t_1+4h^2\,t_2+8h^3\,t_3+16h^4\,t_4$

$f(x_2)=t_0+2h\,t_1+4h^2\,t_2+8h^3\,t_3+16h^4\,t_4$ (6)

Notăm $f(x_0)=t_0$ (7)

Din sistemul format din relațiile (3),(4),(5),(6) și (7)obținem:

$$\begin{cases} t_0-2h\,t_1+4h^2\,t_2-8h^3\,t_3+16h^4\,t_4=f(x_{-2}) \\ t_0-h\,t_1+h^2\,t_2-h^3\,t_3+h^4\,t_4=f(x_{-1}) \\ t_0+h\,t_1+h^2\,t_2+h^3\,t_3+h^4\,t_4=f(x_1) \\ t_0+2h\,t_1+4h^2\,t_2+8h^3\,t_3+16h^4\,t_4=f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2ht_1+4h^2t_2-8h^3t_3+16h^4t_4=f(x_{-2})+f(x_0) & (a) \\ -ht_1+h^2t_2-h^3t_3+h^4t_4=f(x_{-1})+f(x_0) & (b) \\ ht_1+h^2t_2+h^3t_3+h^4t_4=f(x_1)+f(x_0) & (c) \\ 2ht_1+4h^2t_2+8h^3t_3+16h^4t_4=f(x_2)+f(x_0) & (d) \end{cases}$$

Din relațiile (a),(b),(c),(d) formăm un alt sistem, astfel:

$$\begin{cases} (a)+(d) & (a') \\ (b)+(c & (b') \\ (d)-(a) & (c') \\ (c)-(b) & (d') \end{cases} \qquad (8)$$

Luăm acum separate, fiecare relație: (a'), (b'), (c'), (d') și le calculăm.

Din (a') $\Rightarrow \begin{cases} -2h\,t_1+4h^2\,t_2-8h^3\,t_3+16h^4\,t_4=f(x_{-2})-f(x_0) \\ 2h\,t_1+4h^2\,t_2+8h^3\,t_3+16h^4\,t_4=f(x_2)-f(x_0) \end{cases} \Rightarrow$

(+) $\quad \diagup \quad 8h^2\,t_2 \quad \diagup \quad 32h^4\,t_4=f(x_{-2})-2f(x_0)+f(x_2)$

(a') devine $\quad 8h^2\,t_2+32h^4\,t_4=f(x_{-2})-2f(x_0)+f(x_2)$ (a'')

$$\text{Din } (c') \Rightarrow \begin{cases} 2h\, t_1 + 4h^2\, t_2 + 8h^3\, t_3 + 16h^4\, t_4 = f(x_2) - f(x_0) \\ -2h\, t_1 + 4h^2\, t_2 - 8h^3\, t_3 + 16h^4\, t_4 = f(x_{-2}) - f(x_0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-) \qquad 4h\, t_1 \qquad 16h^3\, t_3 \qquad = f(x_2) - f(x_{-2})$$

$$(c') \text{ devine } 4ht_1 + 16h^3t_3 = f(x_2) - f(x_{-2}) \qquad (c'')$$

$$\text{Din } (b') \Rightarrow \begin{cases} -ht_1 + h^2t_2 - h^3t_3 + h^4t_4 = f(x_{-1}) - f(x_0) \\ h\, t_1 + h^2\, t_2 + h^3\, t_3 + h^4\, t_4 = f(x_1) - f(x_0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(+) \qquad 2h^2\, t_2 \qquad 2h^4\, t_4 = f(x_{-1}) - 2f(x_0) + f(x_1)$$

$$(b') \text{ devine } 2h^2t_2 + 2h^4t_4 = f(x_{-1}) - 2f(x_0) + f(x_1) \qquad (b'')$$

$$\text{Din } (d') \Rightarrow \begin{cases} h\, t_1 + h^2\, t_2 + h^3\, t_3 + h^4\, t_4 = f(x_1) - f(x_0) \\ -h\, t_1 + h^2\, t_2 - h^3\, t_3 + h^4\, t_4 = f(x_{-1}) - f(x_0) \end{cases}$$

$$(-) \qquad 2h\, t_1 \qquad 2h^3\, t_3 \qquad = f(x_{-1}) - f(x_1) \Rightarrow$$

$$(d') \text{ devine } 2h\, t_1 + 2h^3\, t_3 = f(x_{-1}) - f(x_1) \qquad (d'')$$

Deci sistemul (8) devine:

$$\begin{cases} 8h^2\, t_2 + 32h^4\, t_4 = f(x_{-2}) - 2f(x_0) + f(x_2) & (a'') \\ 2h^2\, t_2 + 2h^4\, t_4 = f(x_{-1}) - 2f(x_0) + f(x_1) & (b'') \\ 4h\, t_1 + 16h^3\, t_3 = f(x_2) - f(x_{-2}) & (c'') \\ 2h\, t_1 + 2h^3\, t_3 = f(x_{-1}) - f(x_1) & (d'') \end{cases} \qquad (9)$$

$$\text{Din } (a'') + (b'') \Rightarrow \begin{cases} 8h^2\, t_2 + 32h^4\, t_4 = f(x_{-2}) - 2f(x_0) + f(x_2) \\ 2h^2\, t_2 + 2h^4\, t_4 = f(x_{-1}) - 2f(x_0) + f(x_1) \quad / \cdot (-4) \end{cases}$$

$$(+) \qquad 24h^4\, t_4 = f(x_{-2}) - 4f(x_{-1}) + 6f(x_0) - 4f(x_1) + f(x_2)$$

$\Rightarrow$

$$t_4 = \frac{1}{24h^4}\left[f(x_{-2}) - 4f(x_{-1}) + 6f(x_0) - 4f(x_1) + f(x_2) \right] \qquad (10)$$

Din relația (b″) și (10) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2h^2\, t_2 + 2h^4\, t_4 = f(x_{-1})-2f(x_0)+f(x_1) & \Rightarrow \\ t_4 = \dfrac{1}{24h^4}[\, f(x_{-2}) -4f(x_{-1})+6f(x_0)-4\, f(x_1)+ f(x_2)] \end{cases}$$

$\Rightarrow t_2 = \dfrac{1}{2h^2}[\, f(x_{-1}) -2f(x_0)+ f(x_1)- 2h^4\, t_4\,]= \dfrac{1}{2h^2}\{f(x_{-1}) -2f(x_0)+ f(x_1)- 2h^4$

$\cdot \dfrac{1}{24h^4}[\; f(x_{-2})-4f(x_{-1})+6f(x_0)-4\; f(x_1)+\; f(x_2)]\}= \dfrac{1}{24h^4}[\; -f(x_{-2})\; +16f(x_{-1})-$

$30f(x_0)+16\, f(x_1)- f(x_2)]\; \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{1}{24h^4}[-f(x_{-2})+16f(x_{-1})-30f(x_0)+16f(x_1)-f(x_2)] \tag{11}$$

Din (c″)+ (d″) $\Rightarrow \begin{cases} 4h\, t_1 + 16h^3\, t_3 = f(x_2)- f(x_{-2}) & \Rightarrow \\ 2h\, t_1 +2h^3\, t_3 = f(x_{-1})- f(x_1) & / \cdot (-2) \end{cases}$

$(+)\qquad 12h^3\, t_3 = f(x_2)- f(x_{-2})+ f(x_{-1})- f(x_1) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_3 = \frac{1}{12h^3}[\, -f(x_{-2}) +2f(x_{-1})-2f(x_1)+ f(x_2)] \tag{12}$$

Din relațiile (d″) și (12) $\Rightarrow \begin{cases} 2h\, t_1 +2h^3\, t_3 = f(x_{-1})- f(x_1) & \Rightarrow \\ t_3 = \dfrac{1}{12h^3}[\, -f(x_{-2}) +2f(x_{-1})-2f(x_1)+ f(x_2)] \end{cases}$

$\Rightarrow t_1 = \dfrac{1}{2h}[\, -f(x_{-1})+f(x_1)\; -2h^3\; t_3\,]= \dfrac{1}{2h}\{\, -f(x_{-1})+f(x_1)\; -2h^3 \cdot \dfrac{1}{12h^3}[\, -f(x_{-2})$

$+2f(x_{-1})- 2f(x_1)+ f(x_2)]\}= \dfrac{1}{12h}[\, f(x_{-2}) -8f(x_{-1})+8f(x_1) - f(x_2)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{12h}[\, f(x_{-2}) -8f(x_{-1})+8f(x_1) - f(x_2)] \tag{13}$$

Deci, sistemul (9) are soluțiile:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{12h}[\,f(x_{-2}) - 8f(x_{-1}) + 8f(x_1) - f(x_2)] \\ t_2 = \frac{1}{24h^4}[\,-f(x_{-2}) + 16f(x_{-1}) - 30f(x_0) + 16\,f(x_1) - f(x_2)] \\ t_3 = \frac{1}{12h^3}[\,-f(x_{-2}) + 2f(x_{-1}) - 2f(x_1) + f(x_2)] \\ t_4 = \frac{1}{24h^4}[\,f(x_{-2}) - 4f(x_{-1}) + 6f(x_0) - 4\,f(x_1) + f(x_2)] \end{cases} \quad (14)$$

Dacă derivăm relația (2), rezultă:

$$f'(x) = t_1 + 2t_2(x-x_0) + 3t_3(x-x_0)^2 + 4t_4(x-x_0)^3 \quad (15)$$

Pentru $x=x_0$, avem $f'(x_0) = t_1 + 2t_2(x_0-x_0) + 3t_3(x_0-x_0)^2 + 4t_4(x_0-x_0)^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = t_1 = \overline{f'}(x_0) \quad (16)$$

Din relația (13) și (16) $\Rightarrow$

$$\overline{f'}(x_0) = \frac{1}{12h}[\,f(x_{-2}) - 8f(x_{-1}) + 8f(x_1) - f(x_2)] \quad (17)$$

Din relațiile (1) și (17) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \overline{f'}(x_0) = \frac{1}{12h}\,f(x_{-2}) - \frac{8}{12h}f(x_{-1}) + \frac{8}{12h}f(x_1) - \frac{1}{12h}\,f(x_2)] \\ \overline{f'}(x_0) = af(x_{-2}) + bf(x_{-1}) + cf(x_0) + df(x_1) + ef(x_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $a=\frac{1}{12h}$, $b=-\frac{8}{12h}$, $c=0$, $d=\frac{8}{12h}$, $e=-\frac{1}{12h}$, unde a, b, c, d, e sunt constantele derivatei de ordinul întâi când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante.

Fie $\overline{f''}(x_0) = a_1\,f(x_{-2}) + b_1\,f(x_{-1}) + c_1\,f(x_0) + d_1\,f(x_1) + e_1\,f(x_2)$ (18) derivate de ordinal doi, când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante.

Pentru a determina constantele din relația (18), mai întâi derivăm relația (15), atunci rezultă că:

$$f''(x) = 2t_2 + 6t_3(x-x_0) + 12t_4(x-x_0)^2 \quad (19)$$

Pentru $x=x_0$, avem

$$f''(x_0) = 2t_2 + 6t_3(x_0 - x_0) + 12t_4(x_0-x_0)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\overline{f''}(x_0) = 2t_2 = f''(x_0) \quad (20)$$

Din relațiile (11) și (20) $\Rightarrow$

$$\bar{f}''(x_0) = 2 \cdot \frac{1}{24h^4}\,[\,-f(x_{-2}) + 16f(x_{-1}) - 30f(x_0) + 16\,f(x_1) - f(x_2)]$$

$$\Rightarrow \bar{f}''(x_0) = \frac{1}{12h^2}\,[\,-f(x_{-2}) + 16f(x_{-1}) - 30f(x_0) + 16\,f(x_1) - f(x_2)] \qquad (21)$$

Din relațiile (18) și (21)avem că $a_1=-\frac{1}{12h^2}$,$b_1=\frac{16}{12h^2}$,$c_1=-\frac{30}{12h^2}$,$d_1=\frac{16}{12h^2}$,$e_1=-\frac{1}{12h^2}$, unde a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 sunt constantele derivatei de ordinal doi, când se cinaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante.

Fie

$$f'''(x_0) = a_2\,f(x_{-2}) + b_2\,f(x_{-1}) + c_2\,f(x_0) + d_2\,f(x_1) + e_2\,f(x_2) \qquad (22)$$

derivara de ordinul trei, când se cunoaște valoarea în cinci puncte echidistante.

Pentru a determina coeficienții relației (22), derivăm mai întâi relația (19), de unde rezultă că

$$f'''(x) = 6t_3 + 24t_4(x - x_0) \qquad (23)$$

Calculăm relația (23) în punctual $x_0 \Rightarrow$

$$f'''(x_o) = 6t_3 + 24t_4(x_0 - x_0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{f}'''(x_o) = 6t_3 = f'''(x_o) \qquad (24)$$

Din relațiile (12) și (24), rezultă că derivate de ordinal trei, când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante este :

$$\bar{f}'''(x_o) = 6 \cdot \frac{1}{12h^3}\,[\,-f(x_{-2}) + 2f(x_{-1}) - 2f(x_1) + f(x_2)] \qquad \Rightarrow$$

$$\bar{f}'''(x_o) = \frac{1}{2h^3}\,[\,-f(x_{-2}) + 2f(x_{-1}) - 2f(x_1) + f(x_2)] \qquad (25)$$

Constantele derivatei de ordinul trei, când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante, se determină din relațiile (22) și (25), de unde rezultă că:

$a_2=-\frac{1}{2h^3}$, $b_2=\frac{1}{h^3}$, $c_2=0$, $d_2=-\frac{1}{h^3}$, $e_2= \frac{1}{2h^3}$, unde a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 sunt constantele derivatei de ordinul trei când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante.

Considerăm că derivata de ordinul patru, când se cunoaște valoarea funcției in cinci puncte echidistante este de forma:

$\bar{f}^{(4)}(x_0)= a_3 f(x_{-2}) +b_3 f(x_{-1})+c_3 f(x_0) +d_3 f(x_1) +e_3 f(x_2)$ (26)

Pentru a determina constantele din relația (26), mai întâi derivăm relația (23), de unde rezultă că:

$$f^{(4)}(x)=24t_4 \quad (27)$$

Calculăm relația (27) în punctual $x_0 \Rightarrow$

$$\bar{f}^{(4)}(x_0)=24t_4= f^{(4)}(x_0) \quad (28)$$

Din relațiile (10) și (28), rezultă că

$$\bar{f}^{(4)}(x_0)=24\cdot \frac{1}{24h^4}[f(x_{-2}) -4f(x_{-1})+6f(x_0)-4 f(x_1)+ f(x_2)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x_0)=\frac{1}{h^4}[f(x_{-2}) -4f(x_{-1})+6f(x_0)-4 f(x_1)+ f(x_2)] \quad (29)$$

Deci, relația (29) reprezintă derivate de ordinal patru când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante.

Constantele derivatei de ordinul patru, când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante, se determină din relațiile (26) și (29), de unde rezultă că:

$a_3=\frac{1}{h^4}$, $b_3=-\frac{4}{h^4}$, $c_3=\frac{6}{h^4}$, $d_3=-\frac{4}{h^4}$, $e_3= \frac{1}{h^4}$, unde a_3, b_3, c_3, d_3, e_3 sunt constantele derivatei de ordinul patru când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante.

3.2. Eroarea de trunchiere pentru derivatele unei funcţii când se cunoaşte valoarea funcţiei în cinci puncte echidistante

3.2.1. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul întâi

Pentru a calcula eroarea de trunchiere, folosim formula lui Taylor pentru $f\in C^5(a,b)$ și x_0 care aparține unui interval (a,b).

Pentru n=4, avem:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-x_0)^5$$

unde $\xi\in(x_0,x)$ (30)

Calculăm valoarea funcției în punctele $x_{-2}=x_0-2h$, $x_{-1}=x_0-h$, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$, unde $h>0$ folosind formula (30).

$$f(x_{-2})=f(x_0)+f'(x_0)(x_{-2}-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_{-2}-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_{-2}-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_{-2}-x_0)^4+\frac{f^{(5)}(\xi_1)}{5!}(x_{-2}-x_0)^5=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-2h-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-2h-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0-2h-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_0-2h-x_0)^4+$$

$$+\frac{f^{(5)}(\xi_1)}{5!}(x_0-2h-x_0)^5$$

$\Rightarrow$

$$f(x_{-2})=f(x_0)-2hf'(x_0)+2h^2f''(x_0)-\frac{4}{3}h^3f'''(x_0)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x_0)-\frac{4}{15}h^5f^{(5)}(\xi_1) \qquad (31)$$

$$f(x_{-1})=f(x_0)+f'(x_0)(x_{-1}-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_{-1}-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_{-1}-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_{-1}-x_0)^4+\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!}(x_{-1}-x_0)^5=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-h-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-h-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0-h-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_0-h-x_0)^4+$$

$$+\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!}(x_0-h-x_0)^5$$

$\Rightarrow$

$$f(x_{-1})=f(x_0)-hf'(x_0)+h^2\frac{f''(x_0)}{2}-h^3\frac{f'''(x_0)}{6}+h^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{24}-h^5\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{120} \qquad (32)$$

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_1-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_1-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_1-x_0)^4+\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{5!}(x_1-x_0)^5=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x_0+h-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0+h-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0+h-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_0+h-x_0)^4+$$

$$+\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{5!}(x_0+h-x_0)^5$$

$\Rightarrow$

$$f(x_1)=f(x_0)+h\,f'(x_0)+h^2\frac{f''(x_0)}{2}+h^3\frac{f'''(x_0)}{6}+h^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{24}+h^5\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{120} \quad (33)$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_2-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_2-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_{-2}-x_0)^4+\frac{f^{(5)}(\xi_4)}{5!}(x_2-x_0)^5=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x_0+2h-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0+2h-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0+2h-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_0+2h-x_0)^4+$$

$$+\frac{f^{(5)}(\xi_4)}{5!}(x_0+2h-x_0)^5$$

$\Rightarrow$

$$f(x_2)=f(x_0)+2hf'(x_0)+2h^2f''(x_0)+\frac{4}{3}h^3f'''(x_0)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x_0)+\frac{4}{15}h^5f^{(5)}(\xi_4) \quad (34)$$

unde $\xi_1\in(x_{-2},x_{-1})$, $\xi_2\in(x_{-1},x_0)$, $\xi_3\in(x_0,x_1)$, $\xi_4\in(x_1,x_2)$.

Folosind formula (17) și ținând cont de relațiile (31),(32),(33) și (34), rezultă:

$$\overline{f}'(x_0)=\frac{1}{12h}\{f(x_0)-2hf'(x_0)+2h^2f''(x_0)-\frac{4}{3}h^3f'''(x_0)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x_0)-\frac{4}{15}h^5f^{(5)}(\xi_1)-$$

$$-8[f(x_0)-h\,f'(x_0)+h^2\frac{f''(x_0)}{2}-h^3\frac{f'''(x_0)}{6}+h^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{24}-h^5\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{120}]+$$

$$+8[f(x_0)+h\,f'(x_0)+h^2\frac{f''(x_0)}{2}+h^3\frac{f'''(x_0)}{6}+h^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{24}+h^5\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{120}]-$$

$$-[f(x_0)+2hf'(x_0)+2h^2f''(x_0)+\frac{4}{3}h^3f'''(x_0)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x_0)+\frac{4}{15}h^5f^{(5)}(\xi_4)]\}$$

Grupând pe rând, după $f(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$ în expresia lui $\overline{f}'(x_0)$, obținem coeficienții acestor derivate ca fiind 0. Analog obținem coeficientul lui $f'(x_0)$ ca fiind egal cu 1.

Deci:

$$\overline{f}'(x_0)=f'(x_0)-\frac{h^4}{45}\left[f^{(5)}(\xi_1)+f^{(5)}(\xi_4)\right]+\frac{h^4}{180}\left[f^{(5)}(\xi_2)+f^{(5)}(\xi_3)\right]$$

$$\Rightarrow \overline{f}'(x_0)=f'(x_0)+\frac{h^4}{45}\left[-f^{(5)}(\xi_1)+\frac{1}{4}f^{(5)}(\xi_2)+\frac{1}{4}f^{(5)}(\xi_3)-f^{(5)}(\xi_4)\right] \quad (35)$$

Eroarea de trunchiere pentru derivate de ordinal întâi este:

$$e_T = \left|\overline{f}'(x_0) - f'(x_0)\right| = \left|f'(x_0) + \frac{h^4}{45}\left[-f^{(5)}(\xi_1) + \frac{1}{4}f^{(5)}(\xi_2) + \frac{1}{4}f^{(5)}(\xi_3) - f^{(5)}(\xi_4)\right] - f'(x_0)\right| \le$$

$$\le \frac{h^4}{45}\left|-f^{(5)}(\xi_1) + \frac{1}{4}f^{(5)}(\xi_2) + \frac{1}{4}f^{(5)}(\xi_3) - f^{(5)}(\xi_4)\right| \le$$

$$\le \frac{h^4}{180}\left[\left|-4f^{(5)}(\xi_1)\right| + \left|-4f^{(5)}(\xi_4)\right| + \left|f^{(5)}(\xi_2)\right| + \left|f^{(5)}(\xi_3)\right|\right] \le$$

$$\le \frac{h^4}{180}\left[4\left|f^{(5)}(\xi_1)\right| + 4\left|f^{(5)}(\xi_4)\right| + \left|f^{(5)}(\xi_2)\right| + \left|f^{(5)}(\xi_3)\right|\right] \tag{36}$$

unde $\xi_1 \in (x_{-2}, x_{-1})$, $\xi_2 \in (x_{-1}, x_0)$, $\xi_3 \in (x_0, x_1)$, $\xi_4 \in (x_1, x_2)$.

Presupunând că $f \in C^5[a,b]$ (adică, derivate de ordinul cinci este continuă), $M = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(5)}(x)\right|$.

Atunci, eroarea este:

$$e_T \le \frac{h^4}{180}\left[4M + 4M + M + M\right] = \frac{h^4}{180}\cdot 10M$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow e_T \le \frac{h^4}{18}\cdot M \\ &h = \frac{b-a}{n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &e_T \le \frac{(b-a)^4}{18n^4}\cdot M \\ &M = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(5)}(x)\right|. \end{aligned} \tag{37}$$

n=numarul de subintervale

Relația (37) reprezintă eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul întâi care trece prin cinci puncte echidistante.

3.2.2. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul doi

Folosind formula (21) și ținând cont de relațiile (31),(32),(33) și (34), rezultă:

$$\overline{f}''(x_0) = \frac{1}{12h^2}\left[-f(x_{-2}) + 16f(x_{-1}) - 30f(x_0) + 16f(x_1) - f(x_2)\right]$$

$$\overline{f}''(x_0) = \frac{1}{12h^2}\{-[f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) - \frac{4}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{2}{3}h^4 f^{(4)}(x_0) - \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_1)] +$$

$$+16[f(x_0) - hf'(x_0) + h^2\frac{f''(x_0)}{2} - h^3\frac{f'''(x_0)}{6} + h^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{24} - h^5\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{120}] - 30f(x_0) +$$

$$+16[f(x_0) + h f'(x_0) + h^2\frac{f''(x_0)}{2} + h^3\frac{f'''(x_0)}{6} + h^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{24} + h^5\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{120}] -$$

$$-[f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) + \frac{4}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{2}{3}h^4 f^{(4)}(x_0) + \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_4)]\}$$

Grupând pe rând, după $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$ în expresia lui $\overline{f''}(x_0)$, obținem coeficienții acestor derivate ca fiind 0. Analog obținem coeficientul lui $f''(x_0)$ ca fiind egal cu 1.

Deci, derivate de ordinal doi este:

$$\overline{f''}(x_0) = f''(x_0) + \frac{h^3}{90}\left[2f^{(5)}(\xi_1) - 2f^{(5)}(\xi_4) - f^{(5)}(\xi_2) + f^{(5)}(\xi_3)\right] \tag{38}$$

unde $\xi_1 \in (x_{-2}, x_{-1})$, $\xi_2 \in (x_{-1}, x_0)$, $\xi_3 \in (x_0, x_1)$, $\xi_4 \in (x_1, x_2)$.

Eroarea de trunchiere pentru derivate de ordinal doi este:

$$e_T = \left|\overline{f''}(x_0) - f''(x_0)\right| = \left|f''(x_0) + \frac{h^3}{90}\left[2f^{(5)}(\xi_1) - 2f^{(5)}(\xi_4) - f^{(5)}(\xi_2) + f^{(5)}(\xi_3)\right] - f''(x_0)\right| \le$$
$$\le \frac{h^3}{90}\{\left|2[f^{(5)}(\xi_4) - f^{(5)}(\xi_1)]\right| + \left|f^{(5)}(\xi_3) - f^{(5)}(\xi_2)\right|\} \tag{39}$$

Luăm separat și calculăm modulele

$$\left|f^{(5)}(\xi_4) - f^{(5)}(\xi_1)\right| = \left|\xi_4 - \xi_1\right| \cdot \left|f^{(6)}(\theta_1)\right| \le 4hM, \theta_1 \in (\xi_4, \xi_1)$$
$$\left|f^{(5)}(\xi_3) - f^{(5)}(\xi_2)\right| = \left|\xi_3 - \xi_2\right| \cdot \left|f^{(6)}(\theta_2)\right| \le 2hM, \theta_1 \in (\xi_3, \xi_2) \tag{40}$$

unde $\xi_1 \in (x_{-2}, x_{-1})$, $\xi_2 \in (x_{-1}, x_0)$, $\xi_3 \in (x_0, x_1)$, $\xi_4 \in (x_1, x_2)$

$M = \sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(6)}(x)\right|$.

Ținând cont de relațiile (39) și (40) obținem eroarea de trunchiere egala cu:

$$e_T \le \frac{h^3}{90}\left[2\cdot 4hM + 2hM\right] = \frac{h^3}{90}\cdot 10M$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow e_T \le \frac{h^3}{9}\cdot M \\ &h = \frac{b-a}{n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad e_T \le \frac{(b-a)^4}{9n^4}\cdot M, \quad M = \sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(6)}(x)\right|. \tag{41}$$

n=numarul de subintervale

Relația (41) reprezintă eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul doi care trece prin cinci puncte echidistante.

3.2.3. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul trei

Folosind formula (25) și ținând cont de relațiile (31),(32),(33) și (34), rezultă:

$$\overline{f}'''(x_0) = \frac{1}{2h^3}\left[-f(x_{-2}) + 2f(x_{-1}) - 2f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$\overline{f}'''(x_0) = \frac{1}{2h^3}\Big\{-\Big[f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) - \frac{4}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{2}{3}h^4 f^{(4)}(x_0) - \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_1)\Big] +$$

$$+8\Big[f(x_0) - h f'(x_0) + h^2\frac{f''(x_0)}{2} - h^3\frac{f'''(x_0)}{6} + h^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{24} - h^5\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{120}\Big] -$$

$$-2\Big[f(x_0) + h f'(x_0) + h^2\frac{f''(x_0)}{2} + h^3\frac{f'''(x_0)}{6} + h^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{24} + h^5\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{120}\Big] +$$

$$+\Big[f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) + \frac{4}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{2}{3}h^4 f^{(4)}(x_0) + \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_4)\Big]\Big\}$$

Grupând pe rând, după $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$ în expresia lui $\overline{f}'''(x_0)$, obținem coeficienții acestor derivate ca fiind 0. Analog obținem coeficientul lui $f'''(x_0)$ ca fiind egal cu 1.

Deci:

$$\overline{f}'''(x_0) = f'''(x_0) + \frac{h^2}{120}\left[16f^{(5)}(\xi_1) + 16f^{(5)}(\xi_4) - f^{(5)}(\xi_2) - f^{(5)}(\xi_3)\right] \tag{42}$$

unde $\xi_1 \in (x_{-2}, x_{-1})$, $\xi_2 \in (x_{-1}, x_0)$, $\xi_3 \in (x_0, x_1)$, $\xi_4 \in (x_1, x_2)$

Eroarea de trunchiere pentru derivate de ordinal trei este:

$$e_T = \left|\overline{f}'''(x_0) - f'''(x_0)\right| = \left|f'''(x_0) + \frac{h^2}{120}\left[16f^{(5)}(\xi_1) - f^{(5)}(\xi_2) - f^{(5)}(\xi_3) + 16f^{(5)}(\xi_4)\right] - f'''(x_0)\right| \le$$

$$\le \frac{h^2}{120}\left[\left|16f^{(5)}(\xi_1)\right| + \left|16f^{(5)}(\xi_4)\right| + \left|-f^{(5)}(\xi_2)\right| + \left|-f^{(5)}(\xi_3)\right|\right] \le$$

$$\le \frac{h^2}{120}\left[16\left|f^{(5)}(\xi_1)\right| + 16\left|f^{(5)}(\xi_4)\right| + \left|f^{(5)}(\xi_2)\right| + \left|f^{(5)}(\xi_3)\right|\right] \le$$

$$\le \frac{h^2}{120}\left[16f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2) + f^{(5)}(\xi_3) + 16f^{(5)}(\xi_4)\right] \tag{43}$$

unde $\xi_1 \in (x_{-2}, x_{-1})$, $\xi_2 \in (x_{-1}, x_0)$, $\xi_3 \in (x_0, x_1)$, $\xi_4 \in (x_1, x_2)$.

Presupunând că f∈C^5[a,b] (adică, derivate de ordinul cinci este continuă),

$$M = \sup_{x\in[a,b]} \left| f^{(5)}(x) \right|.$$

Atunci, eroarea este:

$$e_T \le \frac{h^2}{120}\left[16M + 16M + M + M\right] = \frac{h^2}{120}\cdot 34M$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow e_T \le \dfrac{h^2}{120}\cdot 34M \\ h = \dfrac{b-a}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} e_T \le \dfrac{17}{60}\cdot\dfrac{(b-a)^2}{n^2}\cdot M \\ M = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left| f^{(5)}(x) \right|. \end{array} \qquad (44)$$

n=numarul de subintervale

Relația (44) reprezintă eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul trei care trece prin cinci puncte echidistante.

3.2.4. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul patru

Folosind formula (29) și ținând cont de relațiile (31),(32),(33) și (34), rezultă:

$$\overline{f}^{(4)}(x_0) = \frac{1}{h^4}\left[f(x_{-2}) - 4f(x_{-1}) + 6f(x_0) - 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$\overline{f}^{(4)}(x_0) = \frac{1}{h^4}\Big\{ f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) - \frac{4}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{2}{3}h^4 f^{(4)}(x_0) - \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_1) -$$

$$-4\Big[f(x_0) - h f'(x_0) + h^2\frac{f''(x_0)}{2} - h^3\frac{f'''(x_0)}{6} + h^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{24} - h^5\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{120}\Big] + 6f(x_0) -$$

$$-4\Big[f(x_0) + h f'(x_0) + h^2\frac{f''(x_0)}{2} + h^3\frac{f'''(x_0)}{6} + h^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{24} + h^5\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{120}\Big] +$$

$$+\Big[f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) + \frac{4}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{2}{3}h^4 f^{(4)}(x_0) + \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_4)\Big]\Big\}$$

Grupând pe rând, după f(x_0), f′(x_0), f″(x_0), f‴(x_0) în expresia lui $\overline{f}^{(4)}(x_0)$, obținem coeficienții acestor derivate ca fiind 0. Analog obținem coeficientul lui $f^{(4)}(x_0)$ ca fiind egal cu 1.

Deci, derivate de ordinal patru este:

$$\overline{f}^{(4)}(x_0) = f^{(4)}(x_0) + \frac{h}{30}\left[-8f^{(5)}(\xi_1)+8f^{(5)}(\xi_4)+f^{(5)}(\xi_2)-f^{(5)}(\xi_3)\right] \tag{45}$$

unde $\xi_1 \in (x_{-2},x_{-1})$, $\xi_2 \in (x_{-1},x_0)$, $\xi_3 \in (x_0,x_1)$, $\xi_4 \in (x_1,x_2)$.

Eroarea de trunchiere pentru derivate de ordinal patru este:

$$\begin{aligned} e_T &= \left|\overline{f}^{(4)}(x_0) - f^{(4)}(x_0)\right| = \left| f^{(4)}(x_0) + \frac{h}{30}\left[-8f^{(5)}(\xi_1)+8f^{(5)}(\xi_4)+f^{(5)}(\xi_2)-f^{(5)}(\xi_3)\right] - f^{(4)}(x_0)\right| \le \\ &\le \frac{h}{30}\{|8[f^{(5)}(\xi_4)-f^{(5)}(\xi_1)]| + |f^{(5)}(\xi_2)-f^{(5)}(\xi_3)|\} \end{aligned} \tag{46}$$

Luăm separat și calculăm modulele

$$\begin{aligned} &|f^{(5)}(\xi_4)-f^{(5)}(\xi_1)| = |\xi_4-\xi_1|\cdot|f^{(6)}(\theta_1)| \le |x_0+2h-x_0+2h|M \le 4hM, \theta_1 \in (\xi_4,\xi_1) \\ &|f^{(5)}(\xi_3)-f^{(5)}(\xi_2)| = |\xi_3-\xi_2|\cdot|f^{(6)}(\theta_2)| \le |x_0+h-x_0+h|M \le 2hM, \theta_1 \in (\xi_3,\xi_2) \end{aligned} \tag{47}$$

unde $\xi_1 \in (x_{-2},x_{-1})$, $\xi_2 \in (x_{-1},x_0)$, $\xi_3 \in (x_0,x_1)$, $\xi_4 \in (x_1,x_2)$, $M = \sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(6)}(x)\right|$.

Ținând cont de relațiile (46) și (47) obținem eroarea de trunchiere egala cu:

$$e_T \le \frac{h}{30}\left[8\cdot 4hM + 2hM\right] = \frac{34h^2}{30}\cdot M$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow e_T \le \frac{34h^2}{30}\cdot M \\ &h = \frac{b-a}{n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &e_T \le \frac{17}{15}\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot M \\ &M = \sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(6)}(x)\right|. \end{aligned} \tag{48}$$

n=numarul de subintervale

Relația (48) reprezintă eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul patru care trece prin cinci puncte echidistante.

CAPITOLUL IV
Calculul aproximativ al derivatelor unei funcţii folosind polinoamele de interpolare când se cunoaşte valoarea funcţiei în trei puncte neechidistante

Fie trei puncte neechidistante $x_{-1}<x_0<x_1$,cu $x_{-1}=x_0-h_{-1}$, $x_1=x_0+h_1$, unde $h_{-1},h_1>0$ și distincte, pentru care se cunosc valorile $f(x_{-1})$,$f(x_0)$, $f(x_1)$. (1)

Polinomul de interpolare corespunzator acestor noduri este dat de formula lui Lagrange:

$$P(x)=P(f;x_{-1},x_o,x_1;x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_{-1}-x_0)(x_{-1}-x_1)}y_{-1}+\frac{(x-x_{-1})(x-x_1)}{(x_0-x_{-1})(x_0-x_1)}y_0+\frac{(x-x_{-1})(x-x_0)}{(x_1-x_{-1})(x_1-x_0)}y_1$$

unde $y_{-1}= f(x_{-1})$, $y_0= f(x_0)$, $y_1= f(x_1)$. (2)

Din relațiile (1) și (2), ne dă funcția aproximativă dată de polinomul Lagrange, care este:

$$f(x)=P(x)=P(f;x_{-2},x_{-1},x_o,x_1,x_2;x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-h_{-1}-x_0)(x_0-h_{-1}-x_0-h_1)}f(x_{-1})+\frac{(x-x_{-1})(x-x_1)}{(x_0-x_0+h_{-1})(x_0-x_0-h_1)}f(x_0)+$$

$$+\frac{(x-x_{-1})(x-x_0)}{(x_0+h_1-x_0+h_{-1})(x_0+h_1-x_0)}f(x_1)$$

$\Rightarrow$

$$\overline{f}(x)=P(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h_{-1}(h_{-1}+h_1)}f(x_{-1})-\frac{(x-x_{-1})(x-x_1)}{h_{-1}h_1}f(x_0)+\frac{(x-x_{-1})(x-x_0)}{h_1(h_1+h_{-1})}f(x_1) \qquad (3)$$

Relația (3) reprezintă formula de calcul aproximativ a funcției, care trece prin cele trei puncte neechidistante considerate.

Derivând polinomul din relația (3) obținem:

$$\overline{f}'(x)=P'(x)=\frac{f(x_{-1})}{h_{-1}(h_{-1}+h_1)}\left[(x-x_0)(x-x_1)\right]'-\frac{f(x_0)}{h_{-1}h_1}[(x-x_{-1})(x-x_1)]'+$$

$$+\frac{f(x_1)}{h_1(h_1+h_{-1})}[(x-x_{-1})(x-x_0)]' \qquad (4)$$

$$\begin{cases}\left[(x-x_0)(x-x_1)\right]' = (x-x_0)+(x-x_1)\\ \left[(x-x_{-1})(x-x_1)\right]' = (x-x_{-1})+(x-x_1) \qquad \Rightarrow\\ \left[(x-x_0)(x-x_{-1})\right]' = (x-x_0)+(x-x_{-1})\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\overline{f'}(x) = P'(x) = \frac{f(x_{-1})}{h_{-1}(h_{-1}+h_1)}\left[(x-x_0)+(x-x_1)\right] - \frac{f(x_0)}{h_{-1}h_1}[(x-x_{-1})+(x-x_1)] + \\ + \frac{f(x_1)}{h_1(h_1+h_{-1})}[(x-x_{-1})+(x-x_0)] \qquad (5)$$

Pentru $x=x_0$, avem:

$$\overline{f'}(x_0) = P'(x_0) = \frac{f(x_{-1})}{h_{-1}(h_{-1}+h_1)}\left[(x_0-x_0)+(x_0-x_1)\right] - \frac{f(x_0)}{h_{-1}h_1}[(x_0-x_{-1})+(x_0-x_1)] + \\ + \frac{f(x_1)}{h_1(h_1+h_{-1})}[(x_0-x_{-1})+(x_0-x_0)] = \frac{f(x_{-1})}{h_{-1}(h_{-1}+h_1)}(x_0-x_1) - \frac{f(x_0)}{h_{-1}h_1}[(x_0-x_{-1})+(x_0-x_1)] + \\ + \frac{f(x_1)}{h_1(h_1+h_{-1})}(x_0-x_{-1}) \qquad (6)$$

Ținând cont de relația (1), relația (6) devine:

$$\overline{f'}(x_0) \cong f'(x_0) = P'(x_0) = \frac{-h_1}{h_{-1}(h_{-1}+h_1)} f(x_{-1}) - \frac{h_{-1}-h_1}{h_{-1}h_1} f(x_0) + \frac{h_{-1}}{h_1(h_1+h_{-1})} f(x_1) \qquad (7)$$

Relația (7) reprezintă calculul aproximativ a derivatei de ordinul întâi când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte neechidistante, care coincide cu relația (16) din Capitolul II.

Derivând relația (5) obținem:

$$\overline{f''}(x) = P''(x) = \frac{f(x_{-1})}{h_{-1}(h_{-1}+h_1)}\left[(x-x_0)+(x-x_1)\right]' - \frac{f(x_0)}{h_{-1}h_1}[(x-x_{-1})+(x-x_1)]' + \\ + \frac{f(x_1)}{h_1(h_1+h_{-1})}[(x-x_{-1})+(x-x_0)]' = 2\frac{f(x_{-1})}{h_{-1}(h_{-1}+h_1)} - 2\frac{f(x_0)}{h_{-1}h_1} + 2\frac{f(x_1)}{h_1(h_1+h_{-1})}$$

$$\Rightarrow f''(x) \cong \overline{f''}(x) = \overline{f''}(x_0) = 2\left[\frac{f(x_{-1})}{h_{-1}(h_{-1}+h_1)} - \frac{f(x_0)}{h_{-1}h_1} + \frac{f(x_1)}{h_1(h_1+h_{-1})}\right] \qquad (8)$$

care coincide cu formula (18) din Capitolul II și reprezintă formula de calcul a derivatei de ordinul doi când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte neechidistante

CAPITOLUL V
CALCULUL APROXIMATIV AL DERIVATELOR UNEI FUNCŢII FOLOSIND POLINOAMELE DE INTERPOLARE CÂND SE CUNOAŞTE VALOAREA FUNCŢIEI ÎN CINCI PUNCTE NEECHIDISTANTE

În cazul în care avem cinci puncte neechidistante nu există formule de exprimare a derivatelor aproximative ale funcției f(x) calculate în x_0.

Încercăm să gasim aproximarea funcției care trece prin cele cinci puncte neechidistante cu ajutorul interpolării, și obtinând funcția apoi să o derivăm și să obținem derivatele aproximative ale funcției f(x) calculate în x_0.

Fie cinci puncte neechidistante $x_{-2}<x_{-1}<x_0<x_1<x_2$, cu $x_{-2}=x_0-h_{-1}-h_{-2}$, $x_{-1}=x_0-h_{-1}$, $x_1=x_0+h_1$, $x_2=x_0+h_1+h_2$, unde $h_{-2},h_{-1},h_1,h_2>0$ și distincte, pentru care se cunosc valorile $f(x_{-2}),f(x_{-1}),f(x_0), f(x_1),f(x_2)$. (1)

Polinomul de interpolare corespunzator acestor noduri este dat de formula lui Lagrange:

$P(x)=P(f;x_{-2},x_{-1},x_o,x_1,x_2;x)=$

$$\frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_{-2}-x_{-1})(x_{-2}-x_0)(x_{-2}-x_1)(x_{-2}-x_2)}y_{-2}+\frac{(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_{-1}-x_{-2})(x_{-1}-x_0)(x_{-1}-x_1)(x_{-1}-x_2)}y_{-1}+$$
$$+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_{-2})(x_0-x_{-1})(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_{-2})(x_1-x_{-1})(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+$$
$$+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_{-2})(x_2-x_{-1})(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

unde $y_{-2}= f(x_{-2})$, $y_{-1}= f(x_{-1})$, $y_0= f(x_0)$, $y_1= f(x_1)$, $y_2= f(x_2)$. (2)

Din relațiile (1) și (2), ne dă funcția aproximativă dată de polinomul Lagrange, care este:

$$\bar{f}(x)=P(x)=P(f;x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2;x)=$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-h_{-1}-h_{-2}-x_0+h_{-1})(x_0-h_{-1}-h_{-2}-x_0)(x_0-h_{-1}-h_{-2}-x_0-h_1)(x_0-h_{-1}-h_{-2}-x_0-h_1-h_2)}f(x_{-2})+\\
&+\frac{(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-h_{-1}-x_0+h_{-1}+h_{-2})(x_0-h_{-1}-x_0)(x_0-h_{-1}-x_0-h_1)(x_0-h_{-1}-x_0-h_1-h_2)}f(x_{-1})+\\
&+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_0+h_{-1}+h_{-2})(x_0-x_0+h_{-1})(x_0-x_0-h_1)(x_0-x_0-h_1-h_2)}f(x_0)+\\
&+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0+h_1-x_0+h_{-1}+h_{-2})(x_0+h_1-x_0+h_{-1})(x_0+h_1-x_0)(x_0+h_1-h_{-2}-x_0-h_1-h_2)}f(x_1)+\\
&+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0+h_1+h_2-x_0+h_{-1}+h_{-2})(x_0+h_1+h_2-x_0+h_{-1})(x_0+h_1+h_2-x_0)(x_0+h_1+h_2-x_0-h_1)}f(x_2)
\end{aligned}$$

$$\bar{f}(x)=P(x)=P(f;x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2;x)=$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{h_{-2}(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)}f(x_{-2})+\frac{(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{h_{-1}h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)}f(x_{-1})+\\
&+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)}{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)}{-h_1h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})}f(x_1)+\\
&+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)}{h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})(h_1+h_2)}f(x_2)
\end{aligned} \qquad (3)$$

Această relație (3) reprezintă valoarea funcției aproximative care trece prin cele cinci puncte neechidistante considerate.

5.1. Calculul aproximativ al derivatei de ordinul întâi a unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante

Pentru a calcula derivata de ordinul întâi, pornim de la relația (3), unde:

$f(x)=P(x)=P(f;x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2;x)=$

$$\frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{h_{-2}(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)}f(x_{-2})+\frac{(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{h_{-1}h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)}f(x_{-1})+$$
$$+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)}{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)}{-h_1h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})}f(x_1)+$$
$$+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)}{h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})(h_1+h_2)}f(x_2)$$

Luăm separate din relația (3)și derivăm:

$$(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=$$
$$=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-1})\{(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)[(x-x_2)+(x-x_1)]\}=$$
$$=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)+$$
$$+(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1) \qquad (4)$$

Prin analogie, cu relația (4) obținem că:

$$(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=$$
$$=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_2)+$$
$$+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1) \qquad (5)$$

$$(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)=$$
$$=(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_2)+$$
$$+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1) \qquad (6)$$

$$(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)=$$
$$=(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_2)+$$
$$+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0) \qquad (7)$$

$$(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)=$$
$$=(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)+$$
$$+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0) \qquad (8)$$

Din relațiile (3),(4),(5),(6),(7) și (8) rezultă că derivata de ordinul întâi a unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante este:

$$f^{'}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)}{h_{-2}(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)}f(x_{-2})+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)}{h_{-1}h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)}f(x_{-1})+$$
$$+\frac{(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)}{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)}f(x_0)+ \qquad (9)$$
$$+\frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)}{-h_1h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})}f(x_1)+$$
$$+\frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)}{h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})(h_1+h_2)}f(x_2)$$

Pentru $x=x_0$ și relația (9), rezultă

$$f^{'}(x_0)=\frac{(x_0-x_{-1})(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{h_{-2}(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)}f(x_{-2})+\frac{(x_0-x_{-2})(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{h_{-1}h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)}f(x_{-1})+$$

$$+\frac{(x_0-x_{-1})(x_0-x_1)(x_0-x_2)+(x_0-x_{-2})(x_0-x_1)(x_0-x_2)+(x_0-x_{-2})(x_0-x_{-1})(x_0-x_2)+(x_0-x_{-2})(x_0-x_{-1})(x_0-x_1)}{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)}f(x_0)+$$

$$+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_2)}{-h_1h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})}f(x_1)+\frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)}{h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})(h_1+h_2)}f(x_2) \qquad (10)$$

Din relațiile (2) și (10),obținem calculul aproximativ al derivatei de ordinal întâi a unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante:

$$\bar{f}^{'}(x_0)=\frac{h_{-1}h_1(h_1+h_2)}{h_{-2}(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)}f(x_{-2})-\frac{h_1(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)}{h_{-1}h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)}f(x_{-1})+$$

$$+\frac{h_{-1}h_1(h_1+h_2)+h_1(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)-h_{-1}(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)-h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})}{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)}f(x_0)+$$
$$+\frac{h_{-1}(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)}{-h_1h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})}f(x_1)-\frac{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})}{h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})(h_1+h_2)}f(x_2) \qquad (11)$$

5.2. Calculul aproximativ al derivatei de ordinul doi a unei funcţii când se cunoaşte valoarea funcţiei în cinci puncte neechidistante

Derivata de ordinul doi se calculează pornind de la relația (9).

Derivăm mai întâi expresiile:

$$\begin{aligned}&(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)+\\&+(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)[(x-x_2)+(x-x_1)]+(x-x_1)(x-x_2)+\\&+(x-x_{-1})[(x-x_1)+(x-x_2)]+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_{-1})[(x-x_0)+(x-x_2)]+(x-x_0)(x-x_1)+\\&+(x-x_{-1})[(x-x_0)+(x-x_1)]=2(x-x_1)(x-x_2)+2(x-x_0)(2x-x_1-x_2)+\\&+2(x-x_{-1})(3x-x_0-x_1-x_2)\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}&(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_2)+\\&+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)=2(x-x_1)(x-x_2)+2(x-x_0)(2x-x_1-x_2)+\\&+2(x-x_{-2})(3x-x_0-x_1-x_2)\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}&(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_2)+\\&+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)=2(x-x_1)(x-x_2)+2(x-x_{-1})(2x-x_1-x_2)+\\&+2(x-x_{-2})(3x-x_{-1}-x_1-x_2)\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}&(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_2)+\\&+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)=2(x-x_0)(x-x_2)+2(x-x_{-1})(2x-x_0-x_2)+\\&+2(x-x_{-2})(3x-x_{-1}-x_0-x_2)\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_{-2})(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_1)+\\&+(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)=2(x-x_0)(x-x_1)+2(x-x_{-1})(2x-x_0-x_1)+\\&+2(x-x_{-2})(3x-x_{-1}-x_0-x_1)\end{aligned}\tag{16}$$

Din relațiile (12),(13),(14),(15) și (16) rezultă că derivata de ordinul doi cândsecunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante.

$$\overline{f''}(x)=\frac{2\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)+2\left(x-x_0\right)(2x-x_1-x_2)+2\left(x-x_{-1}\right)(3x-x_0-x_1-x_2)}{h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)}f(x_{-2})-$$

$$-\frac{2\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)+2\left(x-x_0\right)(2x-x_1-x_2)+2\left(x-x_{-2}\right)(3x-x_0-x_1-x_2)}{h_{-1}h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)}f(x_{-1})+$$

$$+\frac{2\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)+2\left(x-x_{-1}\right)(2x-x_1-x_2)+2\left(x-x_{-2}\right)(3x-x_{-1}-x_1-x_2)}{h_{-1}h_1\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_0)+$$

$$+\frac{2\left(x-x_0\right)\left(x-x_2\right)+2\left(x-x_{-1}\right)(2x-x_0-x_2)+2\left(x-x_{-2}\right)(3x-x_{-1}-x_0-x_2)}{-h_1h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)}f(x_1)-$$

$$-\frac{2\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)+2\left(x-x_{-1}\right)(2x-x_0-x_1)+2\left(x-x_{-2}\right)(3x-x_{-1}-x_0-x_1)}{h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_2) \tag{17}$$

Pentru $x=x_0$, relația (17) devine:

$$\overline{f''}(x_0)=\frac{2\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)+2\left(x_0-x_{-1}\right)(2x_0-x_1-x_2)}{h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)}f(x_{-2})-$$

$$-\frac{2\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)+2\left(x_0-x_{-2}\right)(2x_0-x_1-x_2)}{h_{-1}h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)}f(x_{-1})+$$

$$+\frac{2\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)+2\left(x_0-x_{-1}\right)(2x_0-x_1-x_2)+2\left(x_0-x_{-2}\right)(3x_0-x_{-1}-x_1-x_2)}{h_{-1}h_1\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_0)+$$

$$+\frac{2\left(x_0-x_{-1}\right)(x_0-x_2)+2\left(x_0-x_{-2}\right)(2x_0-x_{-1}-x_2)}{-h_1h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)}f(x_1)-$$

$$-\frac{2\left(x-x_{-1}\right)(x_0-x_1)+2\left(x_0-x_{-2}\right)(2x_0-x_{-1}-x_1)}{h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_2) \tag{18}$$

Din relațiile (1) și (18), rezultă relația (19):

$$\overline{f''}(x_0)=\frac{2[h_1\left(h_1+h_2\right)-h_{-1}\left(2h_1+h_2\right)]}{h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)}f(x_{-2})-\frac{2[h_1\left(h_1+h_2\right)-\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(2h_1+h_2\right)]}{h_{-1}h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)}f(x_{-1})+$$

$$+\frac{2[\left(h_1+h_2\right)\left(h_1-h_{-1}\right)-h_{-1}h_1-\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(2h_1+h_2-h_{-1}\right)]}{h_{-1}h_1\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_0)-\frac{2[h_{-1}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)-\left(h_1+h_2\right)\left(2h_{-1}+h_{-2}\right)]}{h_1h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)}f(x_1)+$$

$$+\frac{2[\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}-h_1\right)-h_{-1}h_1]}{h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_2) \tag{19}$$

care reprezintă formula de calcul a derivatei aproximative de ordinul doi a unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante.

5.3. Calculul aproximativ al derivatei de ordinul trei a unei funcţii când se cunoaşte valoarea funcţiei în cinci puncte neechidistante

Valoarea aproximativă a derivatei de ordinul trei este egală cu derivata de ordinul trei a polinomului Lagrange dat de relația (3).

Calculăm mai întâi expresiile de la relația (17):

$$\begin{aligned}&2(x-x_1)(x-x_2)+2(x-x_0)(2x-x_1-x_2)+2(x-x_{-1})(3x-x_0-x_1-x_2)=2[x-x_2+x-x_1+\\&+2x-x_1-x_2+2(x-x_0)+3x-x_0-x_1-x_2+3(x-x_{-1})]=6(4x-x_0-x_1-x_2-x_{-1})\end{aligned} \tag{20}$$

Prin analogie cu relația (20), rezultă:

$$2(x-x_1)(x-x_2)+2(x-x_0)(2x-x_1-x_2)+2(x-x_{-2})(3x-x_0-x_1-x_2)=6(4x-x_0-x_1-x_2-x_{-2}) \tag{21}$$

$$2(x-x_1)(x-x_2)+2(x-x_{-1})(2x-x_1-x_2)+2(x-x_{-2})(3x-x_{-1}-x_1-x_2)=6(4x-x_{-1}-x_1-x_2-x_{-2}) \tag{22}$$

$$2(x-x_0)(x-x_2)+2(x-x_{-1})(2x-x_0-x_2)+2(x-x_{-2})(3x-x_{-1}-x_0-x_2)=6(4x-x_{-2}-x_{-1}-x_0-x_2) \tag{23}$$

$$2(x-x_0)(x-x_1)+2(x-x_{-1})(2x-x_0-x_1)+2(x-x_{-2})(3x-x_{-1}-x_0-x_1)=6(4x-x_{-2}-x_{-1}-x_0-x_1) \tag{24}$$

Din relațiile (20),(21),(22),(23) și (23), avem derivata de ordinul doi:

$$\begin{aligned}\bar{f}'''(x)&=\frac{6(4x-x_0-x_1-x_2-x_{-1})}{h_{-2}(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)}f(x_{-2})-\frac{6(4x-x_0-x_1-x_2-x_{-2})}{h_{-1}h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)}f(x_{-1})+\\&+\frac{6(4x-x_{-1}-x_1-x_2-x_{-2})}{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)}f(x_0)+\frac{6(4x-x_{-2}-x_{-1}-x_0-x_2)}{-h_1h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})}f(x_1)-\\&-\frac{6(4x-x_{-2}-x_1-x_0-x_{-1})}{h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})(h_1+h_2)}f(x_2)\end{aligned} \tag{25}$$

Pentru x=x$_0$, relația (25) devine:

$$\begin{aligned}\bar{f}'''(x_0)&=\frac{6(3x_0-x_1-x_2-x_{-1})}{h_{-2}(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)}f(x_{-2})-\frac{6(3x_0-x_1-x_2-x_{-2})}{h_{-1}h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)}f(x_{-1})+\\&+\frac{6(4x-x_{-1}-x_1-x_2-x_{-2})}{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)}f(x_0)+\frac{6(3x_0-x_{-2}-x_{-1}-x_2)}{-h_1h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})}f(x_1)-\\&-\frac{6(3x_0-x_{-2}-x_1-x_{-1})}{h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})(h_1+h_2)}f(x_2)\end{aligned} \tag{26}$$

Ținând cont de relația (1), formula (26) devine:

$$\begin{aligned}\bar{f}'''(x_0)&=\frac{6(h_{-1}-2h_1-h_2)}{h_{-2}(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)}f(x_{-2})-\frac{6(h_{-1}+h_{-2}-2h_1-h_2)}{h_{-1}h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)}f(x_{-1})+\\&+\frac{6(2h_{-1}+h_{-2}-2h_1-h_2)}{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)}f(x_0)-\frac{6(2h_{-1}+h_{-2}-h_1-h_2)}{h_1h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})}f(x_1)+\frac{6(2h_{-1}+h_{-2}-h_1)}{h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})(h_1+h_2)}f(x_2)\end{aligned} \tag{27}$$

care reprezintă formula de calcul aproximativ a derivatei de ordinul trei a unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante.

5.4. Calculul aproximativ al derivatei de ordinul patru a unei funcţii când se cunoaşte valoarea funcţiei în cinci puncte neechidistante

Pornind de la relația (25) și derivând-o, vom obține derivata de ordinul patru:

$$\begin{aligned}\overline{f}^{(4)}(x) &= \frac{24}{h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_{1}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{-2})-\frac{24}{h_{-1}h_{-2}\left(h_{-1}+h_{1}\right)\left(h_{-1}+h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{-1})+\\&+\frac{24}{h_{-1}h_{1}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{0})-\frac{24}{h_{1}h_{2}\left(h_{1}+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{1}+h_{-1}\right)}f(x_{1})+\\&+\frac{24}{h_{2}\left(h_{1}+h_{2}+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{1}+h_{2}+h_{-1}\right)\left(h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{2})\end{aligned} \tag{28}$$

Pentru $x=x_0$, relația (28) devine:

$$\begin{aligned}\overline{f}^{(4)}(x_0) &= \frac{24}{h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_{1}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{-2})-\frac{24}{h_{-1}h_{-2}\left(h_{-1}+h_{1}\right)\left(h_{-1}+h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{-1})+\\&+\frac{24}{h_{-1}h_{1}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{0})-\frac{24}{h_{1}h_{2}\left(h_{1}+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{1}+h_{-1}\right)}f(x_{1})+\\&+\frac{24}{h_{2}\left(h_{1}+h_{2}+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{1}+h_{2}+h_{-1}\right)\left(h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{2})\end{aligned} \tag{29}$$

care este chiar derivata de ordinul patru a unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante.

Observații:

1. Expresiile derivatelor numerice obținute în acest capitol sunt folosite la rezolvarea ecuațiilor și sistemelor de ecuații diferențiale.
2. Dacă funcția f(x) este o funcție polinomială de gradul cel mult patru, atunci derivatele ei pâna la ordinul patru calculate cu formulele din acest capitol sunt exacte.

CAPITOLUL VI

Calculul erorilor pentru derivatele unei funcţii când se ştie valoarea funcţiei în cinci puncte neechidistante

Pentru a calcula eroarea de trunchiere, folosim formula lui Taylor pentru $f\in C^5(a,b)$ și x_0 care aparține unui interval (a,b).

Pentru n=4, avem:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-x_0)^5$$

unde $\xi\in(x_0,x)$ (1)

,

Calculăm valoarea funcției în punctele $x_{-2}=x_0-h_{-1}-h_{-2}$, $x_{-1}=x_0-h_{-1}$, $x_1=x_0+h_1$, $x_2=x_0+h_1+h_2$, unde $h_{-2},h_{-1},h_1,h_2>0$ folosind formula (1).

$$f(x_{-2})=f(x_0)+f'(x_0)(x_{-2}-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_{-2}-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_{-2}-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_{-2}-x_0)^4+\frac{f^{(5)}(\xi_1)}{5!}(x_{-2}-x_0)^5=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-h_{-1}-h_{-2}-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-h_{-1}-h_{-2}-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0-h_{-1}-h_{-2}-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_0-h_{-1}-h_{-2}-x_0)^4+$$

$$+\frac{f^{(5)}(\xi_1)}{5!}(x_0-h_{-1}-h_{-2}-x_0)^5$$

$\Rightarrow$

$$f(x_{-2})=f(x_0)-f'(x_0)(h_{-1}+h_{-2})+\frac{f''(x_0)}{2!}(h_{-1}+h_{-2})^2-\frac{f'''(x_0)}{3!}(h_{-1}+h_{-2})^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(h_{-1}+h_{-2})^4-$$

$$-\frac{f^{(5)}(\xi_1)}{5!}(h_{-1}+h_{-2})^5 \qquad (2)$$

$$f(x_{-1})=f(x_0)+f'(x_0)(x_{-1}-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_{-1}-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_{-1}-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_{-1}-x_0)^4+\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!}(x_{-1}-x_0)^5=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-h_{-1}-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-h_{-1}-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0-h_{-1}-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_0-h_{-1}-x_0)^4+$$

$$+\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!}(x_0-h_{-1}-x_0)^5$$

$\Rightarrow$

$$f(x_{-1}) = f(x_0) - h_{-1}f'(x_0) + h_{-1}^2\frac{f''(x_0)}{2!} - h_{-1}^3\frac{f'''(x_0)}{3!} + h_{-1}^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} - h_{-1}^5\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!} \qquad (3)$$

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_1-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_1-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_1-x_0)^4+\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{5!}(x_1-x_0)^5=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x_0+h_1-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0+h_1-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0+h_1-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_0+h_1-x_0)^4+$$

$$+\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{5!}(x_0+h_1-x_0)^5$$

$\Rightarrow$

$$f(x_1) = f(x_0) + h_1f'(x_0) + h_1^2\frac{f''(x_0)}{2!} + h_1^3\frac{f'''(x_0)}{3!} + h_1^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} + h_1^5\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{5!} \qquad (4)$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_2-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_2-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_{-2}-x_0)^4+\frac{f^{(5)}(\xi_4)}{5!}(x_2-x_0)^5=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x_0+h_1+h_2-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_0+h_1+h_2-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_0+h_1+h_2-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x_0+h_1+h_2-x_0)^4+$$

$$+\frac{f^{(5)}(\xi_4)}{5!}(x_0+h_1+h_2-x_0)^5$$

$\Rightarrow$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(h_1+h_2)+\frac{f''(x_0)}{2!}(h_1+h_2)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(h_1+h_2)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(h_1+h_2)^4+$$
$$+\frac{f^{(5)}(\xi_4)}{5!}(h_1+h_2)^5 \qquad (5)$$

unde, $\xi_1 \in (x_{-2},x_{-1})$, $\xi_2 \in (x_{-1},x_0)$, $\xi_3 \in (x_0,x_1)$, $\xi_4 \in (x_1,x_2)$.

6.1. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul întâi

Folosind formula (11) și ținând cont de relațiile (2),(3),(4) și (5), rezultă:

$$\overline{f^{'}}(x_0)=\frac{h_{-1}h_1(h_1+h_2)}{h_{-2}(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)}\times$$

$$\times\left[f(x_0)\ \text{-f'}(x_0)(h_{-1}+h_{-2})+\frac{f''(x_0)}{2!}(h_{-1}+h_{-2})^2-\frac{f'''(x_0)}{3!}(h_{-1}+h_{-2})^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(h_{-1}+h_{-2})^4-\frac{f^{(5)}(\xi_1)}{5!}(h_{-1}+h_{-2})^5\right]-$$

$$-\frac{h_1(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)}{h_{-1}h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)}\left[f(x_0)\ \text{-}h_{-1}\text{f'}(x_0)+h_{-1}^{\ 2}\frac{f''(x_0)}{2!}-h_{-1}^{\ 3}\frac{f'''(x_0)}{3!}+h_{-1}^{\ 4}\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}-h_{-1}^{\ 5}\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!}\right]+$$

$$+\frac{h_{-1}h_1(h_1+h_2)+h_1(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)-h_{-1}(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)-h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})}{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)}f(x_0)+$$

$$+\frac{h_{-1}(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)}{-h_1h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})}\left[f(x_0)\ +h_1\text{f'}(x_0)+h_1^{\ 2}\frac{f''(x_0)}{2!}+h_1^{\ 3}\frac{f'''(x_0)}{3!}+h_1^{\ 4}\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}+h_1^{\ 5}\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{5!}\right]-$$

$$-\frac{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})}{h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})(h_1+h_2)}\times$$

$$\times\left[f(x_0)\ +\text{f'}(x_0)(h_1+h_2)+\frac{f''(x_0)}{2!}(h_1+h_2)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(h_1+h_2)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(h_1+h_2)^4+\frac{f^{(5)}(\xi_4)}{5!}(h_1+h_2)^5\right] \tag{6}$$

Grupând pe rând, după f(x$_0$), f“(x$_0$), f″(x$_0$), f$^{(4)}$(x$_0$) în expresia lui $\overline{f}$ ʹ(x$_0$), obținem coeficienții acestor derivate ca fiind 0. Analog obținem coeficientul lui f ʹ(x$_0$) ca fiind egal cu 1.

Deci:

$$\overline{f^{'}}(x_0)=f^{'}(x_0)-\frac{h_{-1}h_1(h_1+h_2)(h_{-1}+h_{-2})^4}{5!h_{-2}(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)}f^{(5)}(\xi_1)+\frac{h_{-1}^{\ 4}h_1(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)}{5!h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)}f^{(5)}(\xi_2)+$$

$$+\frac{h_{-1}h_1^{\ 4}(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)}{h5!_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})}f^{(5)}(\xi_3)-\frac{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)^4}{5!h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})}f^{(5)}(\xi_4) \tag{7}$$

Eroarea de trunchiere pentru derivate de ordinal întâi este:

$$e_T=\left|\overline{f^{'}(x_0)}-f^{'}(x_0)\right|=\left|f^{'}(x_0)-\frac{h_{-1}h_1(h_1+h_2)(h_{-1}+h_{-2})^4}{5!h_{-2}(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)}\mathrm{f}^{(5)}(\xi_1)+\frac{h_{-1}{}^4h_1(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)}{5!h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)}\mathrm{f}^{(5)}(\xi_2)+\right.$$

$$\left.+\frac{h_{-1}h_1{}^4(h_{-2}+h_{-1})(h_1+h_2)}{5!h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})}\mathrm{f}^{(5)}(\xi_3)-\frac{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)^4}{5!h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})}\mathrm{f}^{(5)}(\xi_4)-f^{'}(x_0)\right|=$$

$$=\frac{h_{-1}h_1(h_1+h_2)(h_{-1}+h_{-2})}{5!h_{-2}h_2(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_1+h_2+h_{-1})(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)(h_1+h_{-1})}\cdot$$

$$\cdot\left|-h_2(h_{-1}+h_{-2})^3(h_1+h_{-1})(h_1+h_2+h_{-1})\mathrm{f}^{(5)}(\xi_1)+h_{-1}{}^3h_2(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)\mathrm{f}^{(5)}(\xi_2)+\right.$$
$$\left.+h_1^3h_{-2}(h_1+h_2+h_{-1})(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)\mathrm{f}^{(5)}(\xi_3)-h_{-2}(h_1+h_{-1})(h_1+h_2)^3(h_{-1}+h_{-2}+h_1)\mathrm{f}^{(5)}(\xi_4)\right|\le$$
$$\le\frac{h_{-1}h_1(h_1+h_2)(h_{-1}+h_{-2})}{5!h_{-2}h_2(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_1+h_2+h_{-1})(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)(h_1+h_{-1})}\cdot$$
$$\cdot[h_2(h_{-1}+h_{-2})^3(h_1+h_{-1})(h_1+h_2+h_{-1})\left|\mathrm{f}^{(5)}(\xi_1)\right|+h_{-1}{}^3h_2(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)\left|\mathrm{f}^{(5)}(\xi_2)\right|+$$
$$+h_1^3h_{-2}(h_1+h_2+h_{-1})(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)\left|\mathrm{f}^{(5)}(\xi_3)\right|+h_{-2}(h_1+h_{-1})(h_1+h_2)^3(h_{-1}+h_{-2}+h_1)\left|\mathrm{f}^{(5)}(\xi_4)\right|]$$

Presupunând că f∊$C^5[a,b]$ (adică, derivate de ordinul cinci este continuă),

$$M=\sup_{[a,b]}\left|f^{(5)}(x)\right|.$$

Deci:

$$e_T\le\frac{h_{-1}h_1(h_1+h_2)(h_{-1}+h_{-2})\cdot M}{5!h_{-2}h_2(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_1+h_2+h_{-1})(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)(h_1+h_{-1})}\cdot$$
$$\cdot[h_2(h_{-1}+h_{-2})^3(h_1+h_{-1})(h_1+h_2+h_{-1})+h_{-1}{}^3h_2(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)+$$
$$+h_1^3h_{-2}(h_1+h_2+h_{-1})(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)+h_{-2}(h_1+h_{-1})(h_1+h_2)^3(h_{-1}+h_{-2}+h_1)] \tag{8}$$

Relația (8) reprezintă eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul întâi care trece prin cinci puncte neechidistante.

Caz particular: când $h_{-2}=h_{-1}=h_1=h_2=h$ obținem:

$$e_T \le \frac{h \cdot h \cdot 2h \cdot 2h \cdot M}{120 \cdot h \cdot h \cdot 2h \cdot 3h \cdot 3h \cdot 4h} \cdot [h \cdot 8h^3 \cdot 2h \cdot 3h + h \cdot h^3 \cdot 3h \cdot 4h +$$

$$+ h \cdot h^3 \cdot 3h \cdot 4h + h \cdot 8h^3 \cdot 2h \cdot 3h] = \frac{h^4 \cdot M}{18} = \frac{(b-a)^4 M}{18n^4}$$

Deci,

$$e_T \le \frac{(b-a)^4 M}{18n^4}$$

care reprezintă eroarea pentru derivate de ordinal întâi prin prin cinci puncte echidistante, unde n=numarul de subintervale.

6.2. Eroarea de trunchiere pentru derivate de ordinal doi

Folosind formula (19) și ținând cont de relațiile (2),(3),(4) și (5), rezultă:

$$\overline{f''(x_0)} = \frac{2[h_1(h_1+h_2) - h_{-1}(2h_1+h_2)]}{h_{-2}(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)} \cdot$$

$$\cdot \left[f(x_0) - f'(x_0)(h_{-1}+h_{-2}) + \frac{f''(x_0)}{2!}(h_{-1}+h_{-2})^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}(h_{-1}+h_{-2})^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(h_{-1}+h_{-2})^4 - \frac{f^{(5)}(\xi_1)}{5!}(h_{-1}+h_{-2})^5 \right] -$$

$$- \frac{2[h_1(h_1+h_2) - (h_{-1}+h_{-2})(2h_1+h_2)]}{h_{-1}h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)} \left[f(x_0) - h_{-1}f'(x_0) + h_{-1}^{\ 2}\frac{f''(x_0)}{2!} - h_{-1}^{\ 3}\frac{f'''(x_0)}{3!} + h_{-1}^{\ 4}\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} - h_{-1}^{\ 5}\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!} \right] +$$

$$+ \frac{2[(h_1+h_2)(h_1-h_{-1}) - h_{-1}h_1 - (h_{-1}+h_{-2})(2h_1+h_2-h_{-1})]}{h_{-1}h_1(h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2)} f(x_0) -$$

$$- \frac{2[h_{-1}(h_{-1}+h_{-2}) - (h_1+h_2)(2h_{-1}+h_{-2})]}{-h_1h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})} \left[f(x_0) + h_1 f'(x_0) + h_1^{\ 2}\frac{f''(x_0)}{2!} + h_1^{\ 3}\frac{f'''(x_0)}{3!} + h_1^{\ 4}\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} + h_1^{\ 5}\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{5!} \right] +$$

$$+ \frac{2[(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}-h_1) - h_{-1}h_1]}{h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})(h_1+h_2)} \cdot$$

$$\cdot \left[f(x_0) + f'(x_0)(h_1+h_2) + \frac{f''(x_0)}{2!}(h_1+h_2)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(h_1+h_2)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(h_1+h_2)^4 + \frac{f^{(5)}(\xi_4)}{5!}(h_1+h_2)^5 \right]$$

Grupând pe rând, după $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$ în expresia lui $f''(x_0)$, obținem coeficienții acestor derivate ca fiind 0. Analog obținem coeficientul lui $f''(x_0)$ ca fiind egal cu 1.

$$\bar{f}''(x_0) = f''(x_0) - \frac{(h_{-1}+h_{-2})^4[h_1(h_1+h_2)-h_{-1}(2h_1+h_2)]}{60h_{-2}(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)} \cdot f^{(5)}(\xi_1) +$$
$$+\frac{h_{-1}^4[h_1(h_1+h_2)-(h_{-1}+h_{-2})(2h_1+h_2)]}{60h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)} f^{(5)}(\xi_2) +$$
$$+\frac{h_1^4[h_{-1}(h_{-1}+h_{-2})-(h_1+h_2)(2h_{-1}+h_{-2})]}{60h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})} f^{(5)}(\xi_3) -$$
$$-\frac{[(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}-h_1)-h_{-1}h_1](h_1+h_2)^4}{60h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})} \cdot f^{(5)}(\xi_4)$$

unde, $\xi_1 \in (x_{-2},x_{-1})$, $\xi_2 \in (x_{-1},x_0)$, $\xi_3 \in (x_0,x_1)$, $\xi_4 \in (x_1,x_2)$.

Așadar, eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul doi este:

$$e_T = \left|\bar{f}''(x_0) - f''(x_0)\right| = \left| f''(x_0) - \frac{(h_{-1}+h_{-2})^4[h_1(h_1+h_2)-h_{-1}(2h_1+h_2)]}{60h_{-2}(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)} \cdot f^{(5)}(\xi_1) + \frac{h_{-1}^4[h_1(h_1+h_2)-(h_{-1}+h_{-2})(2h_1+h_2)]}{60h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)} f^{(5)}(\xi_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{h_1^4[h_{-1}(h_{-1}+h_{-2})-(h_1+h_2)(2h_{-1}+h_{-2})]}{60h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})} f^{(5)}(\xi_3) - \frac{[(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}-h_1)-h_{-1}h_1](h_1+h_2)^4}{60h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})} f^{(5)}(\xi_4) - f''(x_0) \right| =$$

$$= \left| -\frac{(h_{-1}+h_{-2})^4[h_1(h_1+h_2)-h_{-1}(2h_1+h_2)]}{60h_{-2}(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)} \cdot f^{(5)}(\xi_1) + \frac{h_{-1}^4[h_1(h_1+h_2)-(h_{-1}+h_{-2})(2h_1+h_2)]}{60h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)} f^{(5)}(\xi_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{h_1^4[h_{-1}(h_{-1}+h_{-2})-(h_1+h_2)(2h_{-1}+h_{-2})]}{60h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})} f^{(5)}(\xi_3) - \frac{[(h_{-1}+h_{-2})(h_{-1}-h_1)-h_{-1}h_1](h_1+h_2)^4}{60h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})} f^{(5)}(\xi_4) \right|$$

unde, $\xi_1 \in (x_{-2},x_{-1})$, $\xi_2 \in (x_{-1},x_0)$, $\xi_3 \in (x_0,x_1)$, $\xi_4 \in (x_1,x_2)$.

6.3. Eroarea de trunchiere pentru derivata de ordinul trei

Folosind expresia (27), care este derivata de ordinul trei, și ținând cont de relațiile (2),(3),(4), (5) avem:

$$\overline{f}'''(x_0)=\frac{6(h_{-1}-2h_1-h_2)}{h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)}\cdot$$

$$\cdot\left[\mathrm{f}\left(\mathrm{x}_0\right)\ -\mathrm{f}'\left(\mathrm{x}_0\right)\left(h_{-1}+h_{-2}\right)+\frac{\mathrm{f}''\left(\mathrm{x}_0\right)}{2!}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^2-\frac{\mathrm{f}'''\left(\mathrm{x}_0\right)}{3!}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^3+\frac{\mathrm{f}^{(4)}\left(\mathrm{x}_0\right)}{4!}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^4-\frac{\mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_1\right)}{5!}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^5\right]-$$

$$-\frac{6(h_{-1}+h_{-2}-2h_1-h_2)}{h_{-1}h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)}\left[\mathrm{f}\left(\mathrm{x}_0\right)\ -h_{-1}\mathrm{f}'\left(\mathrm{x}_0\right)+h_{-1}{}^2\frac{\mathrm{f}''\left(\mathrm{x}_0\right)}{2!}-h_{-1}{}^3\frac{\mathrm{f}'''\left(\mathrm{x}_0\right)}{3!}+h_{-1}{}^4\frac{\mathrm{f}^{(4)}\left(\mathrm{x}_0\right)}{4!}-h_{-1}{}^5\frac{\mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_2\right)}{5!}\right]+$$

$$+\frac{6(2h_{-1}+h_{-2}-2h_1-h_2)}{h_{-1}h_1\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_0)-$$

$$-\frac{6(2h_{-1}+h_{-2}-h_1-h_2)}{h_1h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)}\left[\mathrm{f}\left(\mathrm{x}_0\right)\ +h_1\mathrm{f}'\left(\mathrm{x}_0\right)+h_1{}^2\frac{\mathrm{f}''\left(\mathrm{x}_0\right)}{2!}+h_1{}^3\frac{\mathrm{f}'''\left(\mathrm{x}_0\right)}{3!}+h_1{}^4\frac{\mathrm{f}^{(4)}\left(\mathrm{x}_0\right)}{4!}+h_1{}^5\frac{\mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_3\right)}{5!}\right]+$$

$$+\frac{6(2h_{-1}+h_{-2}-h_1)}{h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)}\cdot$$

$$\cdot\left[\mathrm{f}\left(\mathrm{x}_0\right)\ +\mathrm{f}'\left(\mathrm{x}_0\right)\left(h_1+h_2\right)+\frac{\mathrm{f}''\left(\mathrm{x}_0\right)}{2!}\left(h_1+h_2\right)^2+\frac{\mathrm{f}'''\left(\mathrm{x}_0\right)}{3!}\left(h_1+h_2\right)^3+\frac{\mathrm{f}^{(4)}\left(\mathrm{x}_0\right)}{4!}\left(h_1+h_2\right)^4+\frac{\mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_4\right)}{5!}\left(h_1+h_2\right)^5\right]$$

Grupând pe rând, după $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$ în expresia lui $f'''(x_0)$, obținem coeficienții acestor derivate ca fiind 0. Analog obținem coeficientul lui $f'''(x_0)$ ca fiind egal cu 1.

$$\overline{f}'''(x_0)=\mathrm{f}'''\left(\mathrm{x}_0\right)+\frac{\left(h_{-1}-2h_1-h_2\right)\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^4}{20h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)}\cdot\mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_1\right)-$$

$$-\frac{h_{-1}{}^4(h_{-1}+h_{-2}-2h_1-h_2)}{20h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)}\mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_2\right)-\frac{h_1{}^4(2h_{-1}+h_{-2}-h_1-h_2)}{20h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)}\mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_3\right)+$$

$$+\frac{\left(2h_{-1}+h_{-2}-h_1\right)\left(h_1+h_2\right)^4}{20h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)}\cdot\mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_4\right)$$

Rezultă că, eroarea de trunchiere:

$$e_T = \left|\overline{f'''}(x_0) - f'''(x_0)\right| = \left| f'''(x_0) + \frac{(h_{-1}-2h_1-h_2)(h_{-1}+h_{-2})^4}{20h_{-2}(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)} \cdot f^{(5)}(\xi_1) - \frac{h_{-1}^{\,4}(h_{-1}+h_{-2}-2h_1-h_2)}{20h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)} f^{(5)}(\xi_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{h_1^{\,4}(2h_{-1}+h_{-2}-h_1-h_2)}{20h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})} f^{(5)}(\xi_3) + \frac{(2h_{-1}+h_{-2}-h_1)(h_1+h_2)^4}{20h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})} \cdot f^{(5)}(\xi_4) - f'''(x_0) \right| \Rightarrow$$

$$e_T = \left| \frac{(h_{-1}-2h_1-h_2)(h_{-1}+h_{-2})^4}{20h_{-2}(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)} \cdot f^{(5)}(\xi_1) - \frac{h_{-1}^{\,4}(h_{-1}+h_{-2}-2h_1-h_2)}{20h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)} f^{(5)}(\xi_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{h_1^{\,4}(2h_{-1}+h_{-2}-h_1-h_2)}{20h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})} f^{(5)}(\xi_3) + \frac{(2h_{-1}+h_{-2}-h_1)(h_1+h_2)^4}{20h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})} \cdot f^{(5)}(\xi_4) \right| \Rightarrow$$

$$e_T \le \left| \left[\frac{(h_{-1}-2h_1-h_2)(h_{-1}+h_{-2})^4}{20h_{-2}(h_{-1}+h_{-2}+h_1)(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2)} \cdot f^{(5)}(\xi_1) + \frac{(2h_{-1}+h_{-2}-h_1)(h_1+h_2)^4}{20h_2(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_2+h_{-1})} \cdot f^{(5)}(\xi_4) \right] \right| +$$

$$+ \left| \left[\frac{h_{-1}^{\,4}(h_{-1}+h_{-2}-2h_1-h_2)}{20h_{-2}(h_{-1}+h_1)(h_{-1}+h_1+h_2)} f^{(5)}(\xi_2) + \frac{h_1^{\,4}(2h_{-1}+h_{-2}-h_1-h_2)}{20h_2(h_1+h_{-1}+h_{-2})(h_1+h_{-1})} f^{(5)}(\xi_3) \right] \right|$$

unde, $\xi_1 \in (x_{-2}, x_{-1})$, $\xi_2 \in (x_{-1}, x_0)$, $\xi_3 \in (x_0, x_1)$, $\xi_4 \in (x_1, x_2)$.

6.4. Eroarea de trunchiere pentru derivate de ordinal patru

Expresia derivatei de ordinal patru este:

$$\overline{f^{(4)}}(x_0)=\frac{24}{h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)}f(x_{-2})-\frac{24}{h_{-1}h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)}f(x_{-1})+$$
$$+\frac{24}{h_{-1}h_1\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_0)-\frac{24}{h_1h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)}f(x_1)+$$
$$+\frac{24}{h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_2)$$

Folosind expresia derivatei de ordinal patru, și ținând cont de formulele (2),(3),(4),(5) obținem:

$$\overline{f^{(4)}}(x_0)=\frac{24}{h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)}\cdot$$
$$\cdot\left[f(x_0)-f'(x_0)\left(h_{-1}+h_{-2}\right)+\frac{f''(x_0)}{2!}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^2-\frac{f'''(x_0)}{3!}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^4-\frac{f^{(5)}(\xi_1)}{5!}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^5\right]-$$
$$-\frac{24}{h_{-1}h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)}\cdot$$
$$\cdot\left[f(x_0)-h_{-1}f'(x_0)+h_{-1}^2\frac{f''(x_0)}{2!}-h_{-1}^3\frac{f'''(x_0)}{3!}+h_{-1}^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}-h_{-1}^5\frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!}\right]+$$
$$+\frac{24}{h_{-1}h_1\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_0)-\frac{24}{h_1h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)}\cdot$$
$$\cdot\left[f(x_0)+h_1f'(x_0)+h_1^2\frac{f''(x_0)}{2!}+h_1^3\frac{f'''(x_0)}{3!}+h_1^4\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}+h_1^5\frac{f^{(5)}(\xi_3)}{5!}\right]+$$
$$+\frac{24}{h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)}\cdot$$
$$\cdot\left[f(x_0)+f'(x_0)\left(h_1+h_2\right)+\frac{f''(x_0)}{2!}\left(h_1+h_2\right)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}\left(h_1+h_2\right)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}\left(h_1+h_2\right)^4+\frac{f^{(5)}(\xi_4)}{5!}\left(h_1+h_2\right)^5\right]$$

Grupând pe rând, după $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, în expresia lui $\overline{f^{(4)}}(x_0)$, obținem coeficienții acestor derivate ca fiind 0. Analog obținem coeficientul lui $f^{(4)}(x_0)$ ca fiind egal cu 1.

Așadar:

$$\overline{f}^{(4)}(x_0) = f^{(4)}(x_0) - \frac{\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^4}{5h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_1\right) +$$

$$+\frac{h_{-1}{}^4}{5h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_2\right) - \frac{h_1{}^4}{5h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_3\right) +$$

$$+\frac{\left(h_1+h_2\right)^4}{h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_4\right)$$

$\Rightarrow$

$$e_T = \left|\overline{f}^{(4)}(x_0) - f^{(4)}(x_0)\right| = \left| f^{(4)}(x_0) - \frac{\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^4}{5h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_1\right) + \right.$$

$$+\frac{h_{-1}{}^4}{5h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_2\right) - \frac{h_1{}^4}{5h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_3\right) +$$

$$\left. +\frac{\left(h_1+h_2\right)^4}{5h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_4\right) - f^{(4)}(x_0)\right|$$

$$e_T = \left| -\frac{\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^4}{5h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_1\right) + \right.$$

$$+\frac{h_{-1}{}^4}{5h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_2\right) - \frac{h_1{}^4}{5h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_3\right) +$$

$$\left. +\frac{\left(h_1+h_2\right)^4}{5h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_4\right)\right| \Rightarrow$$

$$e_T \le \left|\left[\frac{\left(h_1+h_2\right)^4}{5h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_4\right) - \frac{\left(h_{-1}+h_{-2}\right)^4}{5h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_1\right)\right]\right| +$$

$$+\left|\left[\frac{h_{-1}{}^4}{5h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_2\right) - \frac{h_1{}^4}{5h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)} \cdot \mathrm{f}^{(5)}\left(\xi_3\right)\right]\right|$$

unde, $\xi_1 \in (\mathrm{x}_{-2}, \mathrm{x}_{-1})$, $\xi_2 \in (\mathrm{x}_{-1}, \mathrm{x}_0)$, $\xi_3 \in (\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)$, $\xi_4 \in (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$.

CAPITOLUL VII

APLICAȚIE

7.1. Calculul derivatei exacte a unei funcții

Problemă. Fie funcția $f(x)=\ln(2+x^2)$.Se cere să se calculeze f′(1), f″(1), f‴(1) și $f^{(4)}(1)$.

Rezolvare: $f'(x)=\frac{2x}{2+x^2} \Rightarrow f'(1)=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}=0,6666$

$$f''(x)=\frac{2(2+x^2)-4x^2}{(2+x^2)^2}=\frac{4-2x^2}{(2+x^2)^2} \Rightarrow f''(1)=\frac{4-2}{3^2}=\frac{2}{9}=0,2222$$

$$f'''(x)=\frac{-4x(2+x^2)^2-8x(2-x^2)(2+x^2)}{(2+x^2)^4}=\frac{-4x(6-x^2)}{(2+x^2)^3} \Rightarrow$$

$$f'''(1)=\frac{-4\cdot 5}{3^3}=\frac{-20}{27}=-0,7407$$

$$f^{(4)}(x)=$$

$$\frac{[-4(6-x^2)+8x^2](2+x^2)^3+24x^2(2+x^2)^2(6-x^2)}{(2+x^2)^6}=\frac{12(x^4-2x^3+12x-4)}{(2+x^2)^4} \Rightarrow$$

$$f^{(4)}(1)=\frac{12(1-2+12-4)}{3^4}=\frac{84}{81}=1,0370$$

7.2. Derivarea numerică prin trei puncte echidistante

Problema: Fie $x_{-1}=0,98$, $x_0=1$ și $x_1=1,02$ si $f(x)=\ln(2+x^2)$ când se cunoaște $f(x_{-1})=1,08532$; $f(x_0)=1,09861$; $f(x_1)=1,11199$. Se cere $\bar{f}'(1)$ și $\bar{f}''(1)$.

Rezolvare:

Cum $x_{-1}=x_0-h$ si $x_1=x_0+h$, atunci $h=0,02$.

Formulele pentru derivatele de ordinul întâi și doi sunt:

$$\bar{f}'(x_0)=\frac{-f(x_{-1})}{2h}+\frac{f(x_1)}{2h} \quad \Rightarrow$$

$$\bar{f}'(1)=-\frac{1}{2\times 0,02}(1,08532-1,11199)=\frac{0,02667}{0,04}=0,6667$$

$$\bar{f}''(x_0)=\frac{f(x_{-1})}{h^2}-\frac{2f(x_0)}{h^2}+\frac{f(x_1)}{h^2}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{f}''(1)=\frac{1}{(0,02)^2}(1,08532-2\times 1,09861+1,11199)=0,225$$

7.3. Derivarea numerică prin trei puncte neechidistante

Problema: Fie x_{-1}=0,98, x_0=1 și x_1=1,03 si $f(x)=\ln(2+x^2)$ când se cunoaște $f(x_{-1})$=1,08532; $f(x_0)$=1,09861; $f(x_1)$=1,1187. Se cere $\bar{f}'(1)$ și $\bar{f}''(1)$.

Rezolvare:

Cum $x_{-1}=x_0-h_1 \Rightarrow h_1=0,02$

$x_1=x_0+h_2 \Rightarrow h=0,03$.

Formulele pentru derivata de ordinul întâi și ordinul doi sunt:

$$\bar{f}'(x_0)=-\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)}f(x_{-1})+\frac{h_2-h_1}{h_1h_2}f(x_0)+\frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)}f(x_1)$$

$$\bar{f}''(x_0)=2\left[\frac{1}{h_1(h_1+h_2)}f(x_{-1})-\frac{1}{h_1h_2}f(x_0)+\frac{1}{h_2(h_1+h_2)}f(x_1)\right]$$

Pentru x_0=1, avem:

$$\bar{f}'(1)=-\frac{0,03}{0,02(0,02+0,03)}\times 1,08532+\frac{0,03-0,02}{0,02\times 0,03}\times 1,09861+\frac{0,02}{0,03(0,02+0,03)}\times 1,1187=0,6665$$

$$\bar{f}'''(1)=2\left[\frac{1}{0,02(0,02+0,03)}\times 1,08532-\frac{1}{0,02\times 0,03}\times 1,09861+\frac{1}{0,03(0,02+0,03)}\times 1,1187\right]=0,2066$$

7.4. Derivarea numerică prin cinci puncte echidistante

Problema: Fie $x_{-2}=0,96$, $x_{-1}=0,98$, $x_0=1$, $x_1=1,02$ și $x_2=1,04$ cu $f(x)=\ln(2+x^2)$ pentru care $h=0,02$ și valorile în aceste puncte sunt: $f(x_{-2})=1,07213$, $f(x_{-1})=1,08532$; $f(x_0)=1,09861$; $f(x_1)=1,11199$ și $f(x_2)=1,12545$. Se cere $\bar{f}'(1)$, $\bar{f}''(1)$, $\bar{f}'''(1)$ și $\bar{f}^{(4)}(1)$.

Rezolvare:

Aplicând formulele pentru derivatele de ordinul întâi, doi, trei și patru :

$$\bar{f}'(x_0)=\frac{1}{12h}\left[f(x_{-2})-8f(x_{-1})+8f(x_1)-f(x_2)\right]$$

$$\bar{f}''(x_0)=\frac{1}{12h^2}\left[-f(x_{-2})+16f(x_{-1})-30f(x_0)+16f(x_1)-f(x_2)\right]$$

$$\bar{f}'''(x_0)=\frac{1}{2h^3}\left[-f(x_{-2})+2f(x_{-1})-2f(x_1)+f(x_2)\right]$$

$$\bar{f}^{(4)}(x_0)=\frac{1}{h^4}\left[f(x_{-2})-4f(x_{-1})+6f(x_0)-4f(x_1)+f(x_2)\right]$$

atunci, avem:

$$\bar{f}'(1)=\frac{1}{12\times 0,02}(1,07213-8\times 1,08532+8\times 1,11199-1,12545)=0,6668$$

$$\bar{f}''(1)=\frac{1}{12\times 0,02^2}(-1,07213+16\times 1,08532-30\times 1,09861+16\times 1,11199-1,12545)=0,225$$

$$\bar{f}'''(1)=\frac{1}{2\times 0,02^3}(-1,07213+2\times 1,08532-2\times 1,11199+1,12545)=-1,25$$

$$\bar{f}^{(4)}(1)=\frac{1}{0,02^4}(1,07213-4\times 1,08532+6\times 1,09861-4\times 1,11199+1,12545)=0$$

7.5. Derivarea numerică prin cinci puncte neechidistante

Problema: Fie $x_{-2}=0{,}96$, $x_{-1}=0{,}98$, $x_0=1$, $x_1=1{,}01$ și $x_2=1{,}04$, cu funcția $f(x)=\ln(2+x^2)$ când se cunoaște valorile în aceste puncte: $f(x_{-2})=1{,}07213$, $f(x_{-1})=1{,}08532$; $f(x_0)=1{,}09861$; $f(x_1)=1{,}10528$ și $f(x_2)=1{,}12544$. Se cere derivatele: $\overline{f}'(1)$, $\overline{f}''(1)$, $\overline{f}'''(1)$ și $\overline{f}^{(4)}(1)$.

Rezolvare:

Cum $x_{-2}=x_0-h_{-1}-h_{-2} \Rightarrow h_{-2}=0{,}02$

$x_{-1}=x_0-h_{-1} \Rightarrow h_{-1}=0{,}02$

$x_1=x_0+h_1 \Rightarrow h_1=0{,}01$

$x_2=x_0+h_1+h_2 \Rightarrow h_2=0{,}03$

Folosind formulele pentru derivatele de ordinul întâi, doi, trei și patru:

$$f'(x_0)=\frac{h_{-1}h_1\left(h_1+h_2\right)}{h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)}f(x_{-2})-\frac{h_1\left(h_{-2}+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)}{h_{-1}h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)}f(x_{-1})+$$

$$+\frac{h_{-1}h_1\left(h_1+h_2\right)+h_1\left(h_{-2}+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)-h_{-1}\left(h_{-2}+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)-h_{-1}h_1\left(h_{-1}+h_{-2}\right)}{h_{-1}h_1\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_0)+$$

$$+\frac{h_{-1}\left(h_{-2}+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)}{h_1h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)}f(x_1)-\frac{h_{-1}h_1\left(h_{-1}+h_{-2}\right)}{h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_2)$$

$$\overline{f''}(x_0)=\frac{2[h_1\left(h_1+h_2\right)-h_{-1}\left(2h_1+h_2\right)]}{h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_1+h_2\right)}f(x_{-2})-\frac{2[h_1\left(h_1+h_2\right)-\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(2h_1+h_2\right)]}{h_{-1}h_{-2}\left(h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-1}+h_1+h_2\right)}f(x_{-1})+$$

$$+\frac{2[\left(h_1+h_2\right)\left(h_1-h_{-1}\right)-h_{-1}h_1-\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(2h_1+h_2-h_{-1}\right)]}{h_{-1}h_1\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_0)-\frac{2[h_{-1}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)-\left(h_1+h_2\right)\left(2h_{-1}+h_{-2}\right)]}{h_1h_2\left(h_1+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_{-1}\right)}f(x_1)+$$

$$+\frac{2[\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}-h_1\right)-h_{-1}h_1]}{h_2\left(h_1+h_2+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_1+h_2+h_{-1}\right)\left(h_1+h_2\right)}f(x_2)$$

$$\overline{f'''}\left(x_0\right)=\frac{6(h_{-1}-2h_1-h_2)}{h_{-2}(h_{-2}+h_{-1})\left(h_{-2}+h_{-1}+h_1\right)\left(h_{-2}+h_{-1}+h_1+h_2\right)}f\left(x_{-2}\right)-\frac{6(h_{-2}+h_{-1}-2h_1-h_2)}{h_{-2}h_{-1}(h_{-1}+h_1)\left(h_2+h_{-1}+h_1\right)}f\left(x_{-1}\right)+$$

$$+\frac{6(h_{-2}+2h_{-1}-2h_1-h_2)}{h_{-1}h_1(h_1+h_2)(h_{-2}+h_{-1})}f\left(x_0\right)-\frac{6(h_{-2}+2h_{-1}-h_1-h_2)}{h_1h_2(h_{-1}+h_1)\left(h_{-2}+h_{-1}+h_1\right)}f\left(x_1\right)+$$

$$+\frac{6(h_{-2}+2h_{-1}-h_1)}{h_2(h_1+h_2)(h_{-1}+h_1+h_2)\left(h_{-2}+h_{-1}+h_1+h_2\right)}f\left(x_2\right)$$

$$\bar{f}^{(4)}(x)=\frac{24}{h_{-2}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_{1}\right)\left(h_{-1}+h_{-2}+h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{-2})-\frac{24}{h_{-1}h_{-2}\left(h_{-1}+h_{1}\right)\left(h_{-1}+h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{-1})+$$
$$+\frac{24}{h_{-1}h_{1}\left(h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{0})-\frac{24}{h_{1}h_{2}\left(h_{1}+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{1}+h_{-1}\right)}f(x_{1})+$$
$$+\frac{24}{h_{2}\left(h_{1}+h_{2}+h_{-1}+h_{-2}\right)\left(h_{1}+h_{2}+h_{-1}\right)\left(h_{1}+h_{2}\right)}f(x_{2})$$

Atunci, avem:

$$\bar{\mathrm{f}}'(1)=\frac{0,02\times0,01\times0,04\times1,07213}{0,02\times0,04\times0,05\times0,08}-\frac{0,01\times0,04\times0,04\times1,08532}{0,02\times0,02\times0,03\times0,06}+$$
$$+\frac{(0,02\times0,01\times0,04+0,01\times0,04^{2}-0,02\times0,04\times0,04)\times1,09861}{0,02\times0,01\times0,04\times0,04}+\frac{0,02\times0,04\times0,04\times1,10528}{0,01\times0,03\times0,05\times0,03}-$$
$$-\frac{0,02\times0,01\times0,04\times1,12544}{0,03\times0,08\times0,06\times0,04}=2,680325-24,118222-54,9305+78,597688-1,563111=0,66618$$

$$\bar{\mathrm{f}}''(1)=\frac{2(0,01\times0,04-0,02\times0,05)\times1,07213}{0,02\times0,04\times0,05\times0,08}-\frac{2(0,01\times0,04-0,04\times0,05)\times1,08532}{0,02\times0,02\times0,03\times0,06}+$$
$$+\frac{2(-0,04\times0,01-0,02\times0,01-0,04\times0,03)\times1,09861}{0,02\times0,01\times0,04\times0,04}-\frac{2(0,02\times0,04-0,04\times0,06)\times1,10528}{0,01\times0,03\times0,05\times0,03}+$$
$$+\frac{2(0,04\times0,01-0,02\times0,01)\times1,12544}{0,03\times0,08\times0,06\times0,04}=2(-201,024375+2411,822222-6179,68125+3929,884444+$$
$$+39,077777)=2\cdot0,078818=0,157636$$

$$\bar{\mathrm{f}}'''(1)=\frac{6(-0,03)\times1,07213}{0,02\times0,04\times0,05\times0,08}-\frac{6(-0,01)\times1,08532}{0,02\times0,02\times0,03\times0,06}+\frac{6\times0,01\times1,09861}{0,01\times0,02\times0,04\times0,04}-\frac{6\times0,02\times1,10528}{0,01\times0,03\times0,03\times0,05}+$$
$$+\frac{6\times(0,05)\times1,12544}{0,03\times0,04\times0,06\times0,08}=6(-10051,2187+15073,8888+34331,5625-49123,5555+9769,4444)=6\cdot0,1215=0,729$$

$$\bar{\mathrm{f}}^{(4)}(1)=\frac{24\times1,07213}{0,02\times0,04\times0,05\times0,08}-\frac{24\times1,08532}{0,02\times0,02\times0,03\times0,06}+\frac{24\times1,09861}{0,02\times0,01\times0,04\times0,04}-\frac{24\times1,10528}{0,01\times0,03\times0,05\times0,03}+$$
$$+\frac{24\times1,12544}{0,03\times0,08\times0,06\times0,04}=8040975-36177333.33+82395750-58948266.67+4689333,333=45,8325$$

7.7 Tabelul de valori

Funcția f(x) (când $x=x_0=1$)	Derivata exactă	Derivata funcției când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte echidistante	Derivata funcției când se cunoaște valoarea funcției în trei puncte neechidistante
$f'(1)$	0,6666	0,6667	0,6665
$f''(1)$	0,2222	0,225	0,2068

Funcția f(x) (când $x=x_0=1$)	Derivata exactă	Derivata funcției când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante	Derivata funcției când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante
$f'(1)$	0,6666	0,6668	0,6661
$f''(1)$	0,2222	0,225	0,1576
$f'''(1)$	-0,1481	-1,25	0,729
$f^{(4)}(1)$	-0,0493	0	45,8325

Oservații.

1. Considerând valorile funcției în punctele x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2 cu mai multe zecimale exacte, se observă ca derivatele de ordin superior sunt calculate mult mai exact.
2. Se observă că atunci când se lucrează cu cinci zecimale exacte atunci derivatele de ordin superior calculate aproximativ au erori foarte mari.
3. Pentru derivate de ordinal întâi eroarea de trunchiere este majortă de un infinit mic de ordinal patru.
4. Pentru derivate de ordinal doi eroarea de trunchiere este majorată de un infinit mic de ordinal doi.
5. Se observă că valoarea derivatei unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte neechidistante eroarea de trunchiere este mult mai mare decât valoarea derivatei unei funcții când se cunoaște valoarea funcției în cinci puncte echidistante.
6. Pentru derivatele de ordinal trei și patru se lucrează cu h_{-2},h_{-1},h_1 și h_2 cu valori foarte mici.

CONCLUZII

- Formulele pentru obținerea derivatelor calculate aproximativ, trei și cinci puncte, sunt folosite pentru calculul aproximativ al derivatelor de ordinal trei, patru, cinci.
- Ele inlocuiesc formulele de calcul exact al derivatelor într-un punct care nu pot fi folosite pe calculator.
- Expresiile derivatelor numerice obținute în această lucrare de diplomă sunt folosite la rezolvarea ecuațiilor, sistemelor de ecuații diferențiale, ecuații cu derivate parțiale și sistemelor de ecuații cu derivate parțiale folosind metoda rețelelor.
- Formulele de exprimare a derivatelor cu ajutorul valorilor în cinci puncte neechidistante se utilizează de regulă cănd necunoascutele ecuațiilor sau sistemelor de ecuații diferențiale au variații mari pe intervale mici.
- Dacă funcția f(x) este o funcție polinomială de grad cel mult patru, atunci derivatele ei până la ordinal patru date de formulele (17),(21),(25) și(29) sunt exacte.
- Pe masură ce ordinal de derivare crește, eroarea de trunchiere se mărește.
- Din exemplul prezentat se observă că calculul aproximativ al derivatelor de ordin superior când se cunoaște valoarea funcției în trei și cinci puncte echidistante eroarea de trunchiere este mult mai mică față de eroarea de trunchiere din calculul aproximativ al derivatelor de ordin superior când se cunoaște valoarea funcției în trei și cinci puncte neechidistante.

BIBLIOGRAFIE

1. Dinu Tănase "Analiză numerică" , Editura Universității Ploiești, 2002

2. Dinu Tănase
Dinu Octavian "Lucrări de laborator de analiză numerică", Editura Universității Ploiești, 2002

3. "Calculul aproximativ al derivatelor unei funcții folosind polinoamele de interpolare pentru care se cunoaște valoarea funcției în cinci pincte neechidistante" –Buletinul U.P.G. din Ploiești, Vol.LV, Seria Matematica-Informatica-Fizica, Nr. 1/2003, pag (16-20)