Tema 4.5

***

78\. Ip: ABCD – trapez dreptunghic

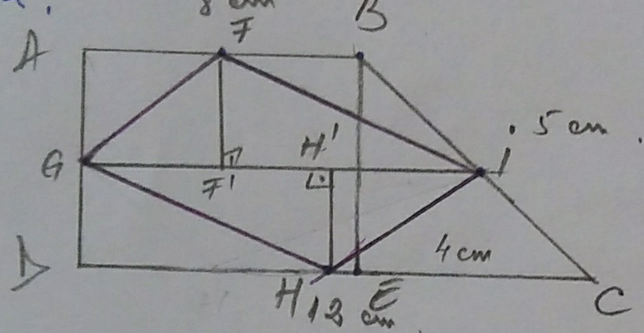
$m(\measuredangle A) = m(\measuredangle D) = 90^\circ$

$AB = 8$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 12$ cm

C: a) $A_{ABCD} = ?$

b) Aria patrulaterului cu vârfurile în mijloacele laturilor trapezului = ?

Rezolvare:



a) $A_{ABCD} = \dfrac{(AB + DC) \cdot AD}{2}$

Ducem din B perpendiculara pe DC. Fie $BE \perp DC$

$\left.\begin{array}{l} AD \perp DC \\ BE \perp DC \end{array}\right| \Rightarrow AD \parallel BE \Rightarrow AD = BE.$

$AB \parallel DE \Rightarrow AB = DE = 8$ cm

$EC = DC - DE = 12 - 8 = 4$ cm

În $\triangle BEC$ – dreptunghic

Din Th. lui Pitagora $\Rightarrow BE^2 = BC^2 - EC^2$

$BE^2 = 5^2 - 4^2$

$BE = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

$BE = 3$ cm

$A_{ABCD} = \dfrac{(8+12) \cdot 3}{2} = \dfrac{\cancel{20}^{10} \cdot 3}{\cancel{2}_1} = 10 \cdot 3 = 30$ cm^2

b) $A_{FGHI} = A_{FGI} + A_{GHI} = \frac{GI \cdot FF'}{2} + \frac{GI \cdot HH'}{2} = \frac{GI}{2} \cdot (FF' + HH')$

unde GI este linie mijlocie în trapezul dreptunghic ABCD, iar FF' este înălțimea în Δ FGI și HH' înălțime în Δ GHI.

$$GI = \frac{AB + DC}{2} = \frac{8+12}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$$

$FF' + HH' = 3$ cm (deoarece suma lor este egală cu AD sau BE)

$$A_{FGHI} = \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}_{1}} \cdot 3 = 15 \text{ cm}^2$$

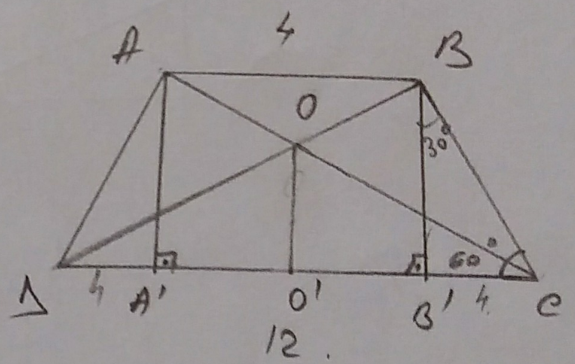
79. Ip: ABCD – trapez isoscel

AB = 4 cm, CD = 12 cm

$AC \cap BD = \{O\}$, $m(\sphericalangle C) = 60°$

C: a) $A_{ABCD} = ?$

b) $A_{BOC} = ?$



Rezolvare: $A_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot BB'}{2}$

BB' este perpendiculara dusă pe DC și AA' perpendiculara dusă din A pe DC. $\Rightarrow$ BB' și AA' sunt înălțimi ale trapezului și BB' = AA', deoarece ABCD – trapez isoscel

$(\Delta AA'D \overset{c.u.}{\equiv} \Delta BB'C$, pentru că $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle C$ și $AD \equiv BC.)$

În Δ BB'C, $m(\sphericalangle B') = 90°$ și $m(\sphericalangle C) = 60° \Rightarrow m(\hat{B}) = 90° - 60° = 30°$

$B'C = DC - A'B' - DA' = 12 - 4 - B'C \Rightarrow B'C = 8 - B'C \Rightarrow$

$\Rightarrow 2B'C = 8 \Rightarrow \boxed{B'C = 4 \text{ cm}}$

$A'B' = AB = 4$ cm

$B'C \equiv DA'$ (deoarece $\Delta AA'D \equiv \Delta BB'C$)

În $\sphericalangle BB'C$ dreptunghic

Din teorema $\sphericalangle$ de $30^\circ \Rightarrow B'C = \frac{BC}{2}$

$4 = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 8$ cm

Din Th. lui Pitagora $\Rightarrow$

$\Rightarrow BB'^2 = BC^2 - B'C^2$

$BB'^2 = 8^2 - 4^2$

$BB' = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm

$A_{ABCD} = \frac{(4+12) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = \frac{\overset{8}{\cancel{16}} \cdot 4\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 32\sqrt{3}$ cm^2

b) $A_{BOC} = ?$

În $\Delta DB'B$ - dreptunghic

Th. lui Pitagora $\Rightarrow BD^2 = DB'^2 + BB'^2 \Rightarrow BD^2 = 8^2 + (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow$

$DB' = 4 + 4 = 8$ cm.

$\Rightarrow BD^2 = 64 + 48 \Rightarrow BD = \sqrt{112} \Rightarrow \underline{BD = 4\sqrt{7} \text{ cm}}$

Ducem $OO' \perp BC \Rightarrow \Delta DO'O \sim \Delta DB'B \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{DO'}{DB'} = \frac{DO}{DB} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{DO}{4\sqrt{7}} \Rightarrow DO = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 4\sqrt{7}}{\cancel{8}_{1}} = 3\sqrt{7}$ cm

$DO' = \frac{DC}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm (deoarece ΔDOC este Δ isoscel, $OD \equiv OC$ ($AC \equiv BD$ datorită faptului că $ABCD$ trapez isoscel)

$DB' = DA' + A'B' = 4 + AB = 4 + 4 = 8$ cm

$OB = DB - DO = 4\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = \sqrt{7}$

Cum $OD \equiv OC$

$\Rightarrow OC = 3\sqrt{7}$ cm

$A_{BOC} = \sqrt{p(p-OB)(p-OC)(p-BC)}$

$p = \frac{OB + OC + BC}{2} = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{7} + 8}{2} = \frac{4\sqrt{7} + 8}{2} = 2\sqrt{7} + 4$ cm

$A_{BOC} = \sqrt{(2\sqrt{7}+4)(2\sqrt{7}+4-\sqrt{7})(2\sqrt{7}+4-3\sqrt{7})(2\sqrt{7}+4-8)} =$

$= \sqrt{(2\sqrt{7}+4)(\sqrt{7}+4)(4-\sqrt{7})(2\sqrt{7}-4)} = \sqrt{[(2\sqrt{7})^2 - 4^2](4^2 - \sqrt{7}^2)} =$

$= \sqrt{(28-16)(16-7)} = \sqrt{12 \cdot 9} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm^2