

Lectia 9

1. $a = 7$ $c = 11^4$ $e = 37$ $g = 18$
 $b = 9$ $d = 3$ $f = 31$

2. $a = 10$
 $b = 25^2 = 625$
 $c = 24$
 $d = 32^2 = 32 \cdot 32 = 1024$
 $e = 99^2 = 99 \cdot 99 = 9801$

3. a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$
b) $12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^3$
c) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$
d) $8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 = 8^4 \cdot 3^4$
e) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1^5$
f) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{2017 \text{ factori}} = 3^{2017}$

4. a) $0^5 + 5^0 = 0 + 1 = 1$
b) $5^3 + 7^0 = 5 \cdot 5 \cdot 5 + 1 = 125 + 1 = 126$
c) $1^{200} + 0^{200} + 6^3 = 1 + 0 + 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1 + 36 \cdot 6 = 1 + 216 = 217$
d) $2^7 - 3^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 128 - 81 = 47$
e) $4^3 - 1^{20} = 4 \cdot 4 \cdot 4 - 1 = 16 \cdot 4 - 1 = 64 - 1 = 63$
f) $7^3 - 4^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 - 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 343 - 256 = 87$
g) $15^2 \cdot 0^9 = 15^2 \cdot 0 = 0$
h) $2^4 : 4^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) : (4 \cdot 4) = 16 : 16 = 1$
i) $2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 8 \cdot 125 = 1000$

$$j) 5^2 \cdot 2^4 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 25 \cdot 16 = 400$$

$$k) 7^2 : 5^0 = 7 \cdot 7 : 1 = 49 : 1 = 49$$

$$l) 18^2 : 3^4 = 324 : 81 = 4$$

$$5. a) 31 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$$

$$b) 49 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$$

$$\text{sum} \\ 49 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2$$

$$6. a) 2^{2017} \Rightarrow u(2^{2017}) = u(2^7) = 8, \quad 2^7 = 128$$

$$b) 7^{2020} \Rightarrow u(7^{2020}) = u(7^0) = 1$$

$$c) 3^{2017} \Rightarrow u(3^{2017}) = u(3^7) = 7, \quad 3^7 = 2187$$

$$d) 5^{2018} \Rightarrow u(5^{2018}) = u(5^8) = 5, \quad 5^8 = 390625$$

$$e) 6^{2019} \Rightarrow u(6^{2019}) = u(6^9) = 6, \quad 6^9 = 10077696$$

$$f) 8^{2021} \Rightarrow u(8^{2021}) = u(8^1) = 8$$

$$g) 9^{2022} \Rightarrow u(9^{2022}) = u(9^2) = 1, \quad 9^2 = 81$$

$$h) 4^{2023} \Rightarrow u(4^{2023}) = u(4^3) = 4, \quad 4^3 = 64$$

$$7. x = 12^{200} + 23^{201} + 34^{302} + 45^{403}$$

$$u(x) = u(12^{200}) + u(23^{201}) + u(34^{302}) + u(45^{403}) =$$

$$= u(2^0) + u(3^1) + u(4^2) + u(5^3) =$$

$$= 1 + 3 + 6 + 5 = 5, \quad 1 + 3 + 6 + 5 = 15$$

$$4^2 = 16$$

$$5^3 = 125$$

$$\boxed{u(x) = 5}$$

8. a) $6^2 < 39 < 7^2$

b) $26^2 < 700 < 27^2$

c) $12^2 < 160 < 13^2$

d) $11^2 < 123 < 12^2$

9. a) 1 234 567

ultima cifră este 7 \Rightarrow 7 nu poate fi pătratul niciunui număr natural

b) $2^{403} + 2^{402} \Rightarrow u(2^{403} + 2^{402}) = u(2^{403}) + u(2^{402}) =$
 $= u(2^3) + u(2^2) = 8 + 4 = \underline{2} \quad , \quad 8 + 4 = 12$

$u(2^{403} + 2^{402}) = 2 \Rightarrow 2$ nu poate fi pătratul niciunui număr natural

c) $3^{12} + 3^{11} \Rightarrow u(3^{12} + 3^{11}) = u(3^{12}) + u(3^{11}) = u(3^2) + u(3^1) =$
 $= 9 + 3 = \underline{2} \quad , \quad 9 + 3 = \underline{12}$

$u(3^{12} + 3^{11}) = 2 \Rightarrow 2$ nu poate fi pătratul niciunui număr natural

d) $248^{17} \Rightarrow u(248^{17}) = u(8^{17}) = u(8^7) = 2 \quad , \quad 8^7 = 2097152$

$u(248^{17}) = 2 \Rightarrow 2$ nu poate fi pătratul niciunui număr natural

10.

a) $x, y = ? \quad , \quad 2^x + 2^y = 257$

Dacă x și $y \neq 0 \Rightarrow 2^x$ și 2^y sunt nr. pare, iar suma lor este număr par \Rightarrow nu poate fi egală cu 257.

Dacă $\boxed{x=0} \Rightarrow 2^x = 2^0 = 1 \Rightarrow 2^x + 2^y = 257 \Rightarrow 1 + 2^y = 257 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^y = 257 - 1 \Rightarrow 2^y = 256 \quad | \quad \Rightarrow 2^y = 2^8 \Rightarrow \boxed{y=8}$
 $256 = 2^8$

Dacă $y=0 \Rightarrow z^5 = z^0 = 1$
 $z^5 + z^4 = 2z^4 \Rightarrow z^4 = 1$

$\Rightarrow z^5 = 2z^4 \Rightarrow z^5 = z^4 \Rightarrow z = 1$

Soluțiile sunt: $x=0, y=1, z=1$

b) $x, y, z = ?$

$z^5 + z^4 + z^3 = 3z^2$

Dacă $x, y, z \neq 0 \Rightarrow z^3, z^4, z^5$

sunt la aceleași numitori putând împărți

Dacă $x=0 \Rightarrow z^5 = z^0 = 1$

$z^5 + z^4 + z^3 = 3z^2$

$\Rightarrow z^3 + z^2 = z^2(z+1) \Rightarrow z^3 + z^2 = 3z^2$

$\Rightarrow z = 3$ și $z = 0$ sau $z = 0$

Dacă $y=0 \Rightarrow x=3$ și $z=0$

Dacă $z=0 \Rightarrow x=3$ și $y=0$

Soluțiile sunt: $x=0, y=1, z=1$
 $x=0, y=3, z=0$
 $x=3, y=0, z=0$
 $x=3, y=0, z=0$
 $x=0, y=0, z=3$
 $x=0, y=0, z=0$

$$\text{Dacă } \boxed{y=0} \Rightarrow 2^y = 2^0 = 1$$

$$2^x + 2^y = 257 \quad / \Rightarrow 2^x + 1 = 257 \Rightarrow 2^x = 257 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x = 256 \Rightarrow 2^x = 2^8 \Rightarrow \boxed{x=8}$$

Soluțiile sunt: $x=0, y=8$ sau $x=8, y=0$

b) $x, y, z = ?$

$$2^x + 2^y + 2^z = 97$$

Dacă $x, y, z \neq 0 \Rightarrow 2^x, 2^y$ și 2^z sunt pare, iar suma lor este număr par \Rightarrow nu poate fi egală cu 97

$$\text{Dacă } x=0 \Rightarrow 2^x = 2^0 = 1$$

$$2^x + 2^y + 2^z = 97 \quad / \Rightarrow 2^y + 2^z + 1 = 97 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^y + 2^z = 96 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^y + 2^z = 2^5 \cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^y + 2^z = 2^5 \cdot (2+1) \Rightarrow 2^y + 2^z = 2 \cdot 2^5 + 2^5 \Rightarrow 2^y + 2^z = 2^6 + 2^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=6 \text{ și } z=5 \text{ sau } y=5 \text{ și } z=6$$

$$\text{Dacă } y=0 \Rightarrow x=5 \text{ și } z=6 \text{ sau } x=6 \text{ și } z=5$$

$$\text{Dacă } z=0 \Rightarrow x=5 \text{ și } y=6 \text{ sau } x=6 \text{ și } y=5$$

Soluțiile sunt:

- $x=0, y=6, z=5$
- $x=0, y=5, z=6$
- $y=0, x=5, z=6$
- $y=0, x=6, z=5$
- $z=0, x=5, y=6$
- $z=0, x=6, y=5$

Limit test

1. a) $5^3 - 4^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5) - (4 \cdot 4 \cdot 4) = 125 - 64 = 61$

b) $(9-8)^{2017} = 1^{2017} = 1$

c) $1^{2001} + 2002^1 = 1 + 2002 = 2003$

2. $A = 7^3 - 6 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 - 6 \cdot 25 + 16 \cdot 3 = 343 - 150 + 48 =$
 $= 193 + 48 = 241$

$$B = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

$$A < B$$

3. $26^2 < 725 < 27^2$

4. $7^{27} + 9^{21} \Rightarrow u(7^{27} + 9^{21}) = u(7^{27}) + u(9^{21}) = u(7^7) + u(9^3) =$
 $= 3 + 9 = 12, \quad 3 + 9 = 12$

$$7^2 = 7 \cdot 7 = \underline{49}$$

$$7^3 = 49 \cdot 7 = \dots \underline{3}$$

$$7^4 = 7^3 \cdot 7 = \dots \underline{3} \cdot 7 = \dots \underline{1}$$

$$7^5 = 7^4 \cdot 7 = \dots \underline{1} \cdot 7 = \dots \underline{7}$$

$$7^6 = 7^5 \cdot 7 = \dots \underline{7} \cdot 7 = \dots \underline{9}$$

$$7^7 = 7^6 \cdot 7 = \dots \underline{9} \cdot 7 = \dots \underline{3}$$

$u(7^{27} + 9^{21}) = 12 \Rightarrow 12$ nu poate fi pătratul niciunei număr natural