3.6. Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic: sin, cos, tg, ctg

Definirea funcțiilor trigonometrice:

$$\text{sinus} = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}; \qquad \text{cosinus} = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}$$

$$\text{tangenta} = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}; \qquad \text{cotangenta} = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$$

Observații: $\text{tangenta} = \dfrac{\text{sinus}}{\text{cosinus}}$; $\text{cotangenta} = \dfrac{\text{cosinus}}{\text{sinus}}$

Formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

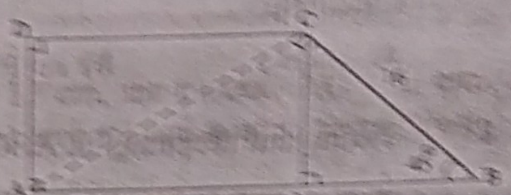
Relații între funcțiile trigonometrice ale unghiurilor complementare:

$\sin\left(90^\circ - x^\circ\right) = \cos x^\circ; \cos\left(90^\circ - x^\circ\right) = \sin x^\circ; \text{tg}\left(90^\circ - x^\circ\right) = \text{ctg}\, x^\circ$

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de 30°, 45°, 60°

u^0	30^0	45^0	60^0
$\sin u^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos u^0$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\, u^0$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\, u^0$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exemplul 1: În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$,
$m(\hat{A}) = 90^\circ, m(\hat{B}) = 45^\circ, AC \perp BC, BC = 16\ cm.$
Calculați perimetrul și aria trapezului.



R: În Δ ACB, $m(\hat{C}) = 90^\circ, m(\widehat{ABC}) = 45^\circ \Rightarrow$
$m(\widehat{CAB}) = 45^\circ$

Δ ACB dreptunghic isoscel $\Rightarrow \cos(\widehat{ABC}) = \frac{CB}{AB}$

$\cos 45^\circ = \frac{16}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{16}{AB} \Rightarrow AB = 16\sqrt{2}$ cm

În Δ ACB dreptunghic isoscel $\Rightarrow$ AC = BC = 16 cm

Construim $CM \perp AB \Rightarrow M -$ *mijlocul* $AB \Rightarrow AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}\ cm$

În Δ CMB, $m(\hat{M}) = 90^\circ \xrightarrow{\text{Teorema lui Pitagora}}$ $CM^2=BC^2-MB^2$, $CM^2=16^2-(8\sqrt{2})^2$, $CM^2=256-128$, $CM=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$ cm

Dar $\left.\begin{matrix} DA \perp AB \\ CM \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow DA \parallel CM, [DA] \equiv [CM] \Rightarrow DA = 8\sqrt{2}\ cm$

$DC \parallel AB, M \in AB \Rightarrow DC \parallel AM \Rightarrow [DC] \equiv [AM] \Rightarrow DC = 8\sqrt{2}\ cm.$

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 16\sqrt{2} + 16 + 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 16(2\sqrt{2} + 1)\ cm.$

$A_{ABCD} = \frac{(AB+DC)\cdot CM}{2} = \frac{(16\sqrt{2}+8\sqrt{2})8\sqrt{2}}{2} = 192\ cm$

Exemplul 2: Să se determine perimetrul triunghiului ABC dreptunghic, știind că:
$AC = 18\sqrt{3}, \sin\hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\hat{C} = \frac{1}{2}$

R:

$\left.\begin{matrix} \sin\hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{BC}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = \frac{18\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 36cm$;

$\left.\begin{matrix} \sin\hat{C} = \frac{1}{2} \\ \sin\hat{C} = \frac{AB}{BC} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{36} \Rightarrow AB = \frac{36\cdot 1}{2} \Rightarrow AB = 18cm$

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = (18 + 36 + 18\sqrt{3})\ cm = 54 + 18\sqrt{3}$ cm

APLICAŢII

1* Dacă n reprezintă măsura unui unghi ascuţit atunci:

a) $\sin^2 n + \cos^2 n =$ ....

b) $\sin(90 - n) =$ ....

c) $\operatorname{ctg}(90 - n) =$ ....

d) $\dfrac{\sin n}{\cos n} =$ ....

e) $\dfrac{\cos n}{\sin n} =$ ....

2* Calculaţi:
$\sin 30° \cdot \cos 30° + \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{ctg} 60° + \sin 45° \cdot \cos 45° - \sin 60° \cdot \cos 60°$.

3* Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$, $AB = 15$ cm şi $AC = 20$ cm.
Calculaţi:

a) $\sin \widehat{B}$; b) $\cos \widehat{B}$; c) $\operatorname{tg} \widehat{B}$; d) $\operatorname{ctg} \widehat{B}$.

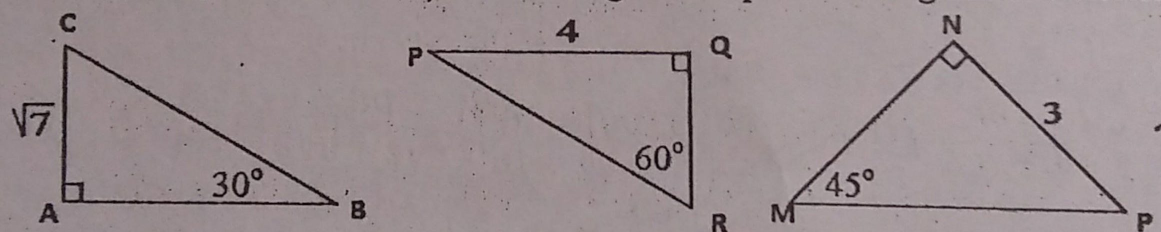
4** Triunghiul dreptunghic ABC are $BC = 10$ cm şi $m(\widehat{C}) = 40°$. Calculaţi cu aproximaţie de o zecime prin lipsă lungimile segmentelor AB şi AC.

5** În triunghiul MNP cu $m(\widehat{M}) = 90°$, $MP = 6$ cm şi $\sin \widehat{N} = 0{,}6$. Calculaţi perimetrul triunghiului.

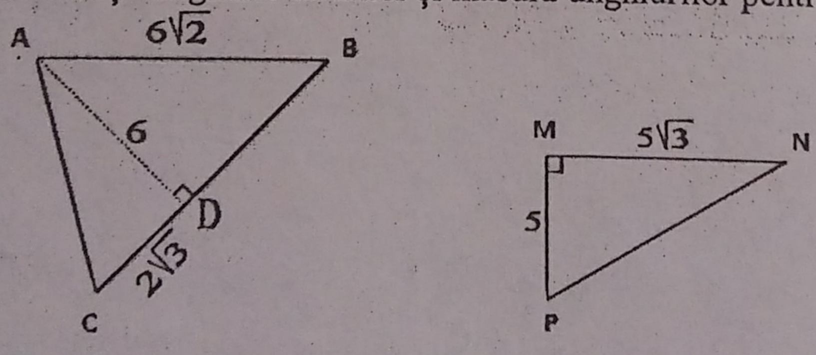
6** Dacă $x < 90°$ şi $\sin x = \dfrac{3}{5}$, determinaţi:

a) $\cos x$; b) $\operatorname{tg} x$; c) $\operatorname{ctg} x$.

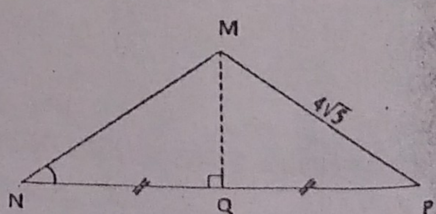
7** Calculaţi lungimile laturilor şi măsura unghiurilor pentru triunghiurile următoare:



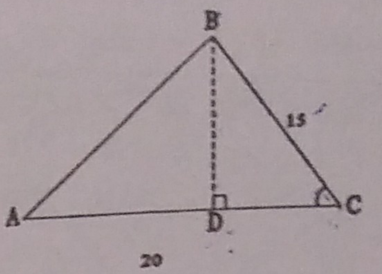
8**. Calculaţi lungimile laturilor şi măsura unghiurilor pentru triunghiurile următoare:



9** Calculaţi perimetrul triunghiul MNP, ştiind că $\operatorname{tg}(\angle N) = 0{,}5$.



10** Calculați aria triunghiul ABC (figură) știind că AC=20 cm, BC=15 cm, $\sin C=\frac{4}{5}$.



11*** Fie triunghiul dreptunghic ABC, $m(\widehat{A})=90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Demonstrați că: $AD = BC \cdot \sin\widehat{B} \cdot \sin\widehat{C}$.

12*** Fie triunghiul oarecare ABC cu $m(\widehat{A}) < 90°$.

Demonstrați că $A_{\Delta ABC} \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{A}}{2}$.

13*** Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) > 90°$. Demonstrați că:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(180 - \widehat{A})}{2}.$$

14*** În triunghiul dreptunghic ABC, ipotenuza BC = 12 cm, iar cateta AC = 6 cm. Mediana [BM] formează cu AB și BC unghiuri ale căror măsuri sunt x, respectiv y. Demonstrați că: $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

15*** Dacă *n* este măsura unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic, demonstrați egalitatea: $\dfrac{\sin n}{1-\cos n} = \dfrac{1}{\sin n} + \operatorname{ctg} n$.

16*** Într-un triunghi ABC se cunosc: AB = 30 cm, AC = 24 cm și BC = 20 cm. Calculați suma: $S = \dfrac{\sin\widehat{A}}{\sin\widehat{B}} + \dfrac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{C}} + \dfrac{\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}}$.

17*** Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 60°$, AB = 8 cm și AC = 10 cm. Dacă [AD] este bisectoare în ΔABC, aflați lungimea lui [AD].

18*** Fie dreptunghiul ABCD și pătratul DEFG, $E \in (AB)$ și $F \in (BC)$. Dacă DE = 5 cm și EB = 4 cm, se cere:

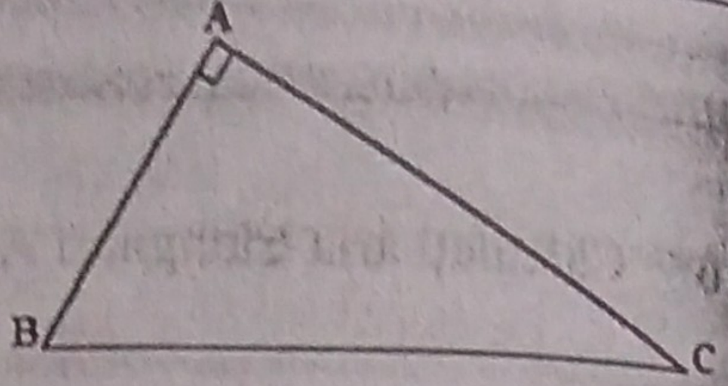
a) AB; b) CF; c) $\operatorname{tg} \widehat{CFG}$;

d) CM, unde $\{M\} = FG \cap DC$; e) $A_{\Delta CFG}$.

19*** Un observator se află la o distanță de 15 m de o clădire pe care o vede sub un unghi de 45°. Cu cât trebuie să se apropie observatorul de clădire pentru a vedea sub un unghi de 60°?

Observație: Rezolvarea triunghiului dreptunghic presupune determinarea tuturor elementelor necunoscute ale triunghiului (toate laturile și toate unghiurile) aplicând teoremele studiate anterior.

Exemplul 1: Determinați măsurile unghiurilor și lungimile laturilor AB și AC, ale triunghiului dreptunghic ABC, știind că BC = 14 cm și $m(\hat{C}) = 60°, m(\hat{A}) = 90°$.



R: $\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$

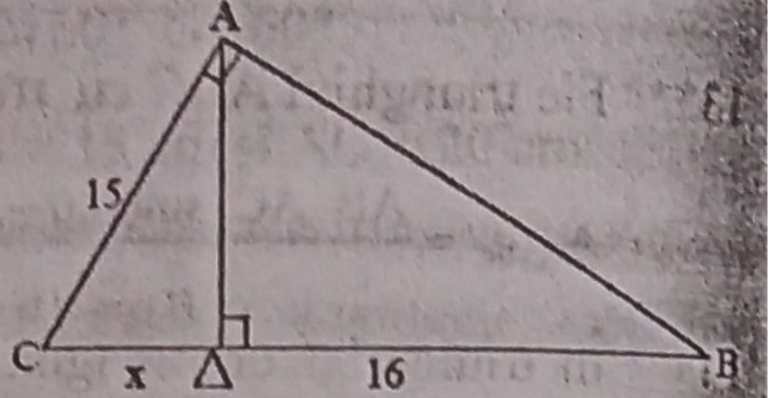
$\sin 60° = \frac{AB}{14} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{14} \Rightarrow AB = 7\sqrt{3}\ cm$

$m(\hat{B}) = 180° - m(\hat{A}) - m(\hat{C}) \Rightarrow m(\hat{B}) = 30°$

$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$

$\sin 30° = \frac{AC}{14} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{14} \Rightarrow AC = 7\ cm$

Exemplul 2: Determinați elementele necunoscute ale ΔABC, știind că $m(\hat{A}) = 90°, AD \perp BC,$ $D \in BC, AC = 15\ cm, BD = 16\ cm.$



R: În Δ ABC dreptunghic,

$m(\hat{A}) = 90°, AD \perp BC, D \in BC \xRightarrow{t.catetei}$

$\Rightarrow AC^2 = CD \cdot CB$

Notăm CD = $x \Rightarrow BC = CD + 16 = x + 16$

$\Rightarrow 15^2 = x(x + 16) \Leftrightarrow 225 = x^2 + 16x \Leftrightarrow x^2 + 16x - 225 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 16x + 64 - 289 = 0 \Leftrightarrow (x + 8)^2 - 17^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 8)^2 = 17^2$

$\Rightarrow x + 8 = 17 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow CD = 9\ cm$

BC = 16 + 9 = 25 cm

$\xRightarrow{Teorema\ lui\ Pitagora} BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 25^2 = AB^2 + 15^2 \Rightarrow$

$AB^2 = 625 - 225 = 400 \Rightarrow AB = \sqrt{400} = 20$

$\xRightarrow{Teorema\ înălțimii} AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} \Leftrightarrow AD = \frac{15 \cdot 20}{25} \Rightarrow AD = 12\ cm$

$\sin(\widehat{CAB}) = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin(\widehat{CAB}) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos(\widehat{ACB}) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$