# Varianta 3

## Subiectul I

1. $\div\ 1, 7, 13, 19 \ldots$ $\qquad a_{10} = ?$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_2 = a_1 + r \Rightarrow 7 = 1 + r \Rightarrow r = 6$

$n = 10$

$a_{10} = 1 + (10-1)\cdot 6 = 1 + 54 = 55$

2. Nr. naturale de 3 cifre cu elem. din mulțimea $\{1, 2\}$ sunt, 111, 112, 122, 121, 222, 211, 221, 212 deci în total sunt 8 cazuri posibile

Dintre acestea sunt divizibile cu 3 numerele : 111 și 222

Probabilitatea cerută este : $P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $\begin{pmatrix} m = 2 \\ n = 8 \end{pmatrix}$

Probabilitatea unui eveniment este egală cu raportul dintre nr. cazurilor egale posibile care realizează evenimentul ($m$) și nr. cazurilor egal posibil ($n$). $\quad P = \frac{m}{n}$

3. $\sqrt{2+x} = x \overset{()^2}{\Leftrightarrow} 2 + x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

C.E. $2 + x \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \geq -2$.

$\Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = -1$ nu convine (nu verifică ec.)

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) = ?$

$f(-2) = -4 + 1 = -3$
$f(-1) = -2 + 1 = -1$.
$f(0) = 1$
$f(1) = 3$

$\Rightarrow \cancel{-3} \cancel{-1} + \cancel{1} + \cancel{3} = 0$.

5. Ec. dreptei $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ $\qquad A(\overset{x_1}{2}, \overset{y_1}{-1}),\ B(\overset{x_2}{1}, \overset{y_2}{-2})$

sau $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$y + 1 = \frac{-2+1}{1-2}(x - 2) \Leftrightarrow y + 1 = \frac{-1}{-1}(x-2) \Leftrightarrow y + 1 = x - 2 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$.

= 10 = 10 =

6. $S_{ABC} = ?$ , $AB = AC = \sqrt{2}$ , $m(\measuredangle A) = 30°$.

$$S = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 30°}{2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

## Subiectul II

1. a) $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 0$.

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = ?$

$$\begin{cases} x_1^3 - 2x_1 = 0 \\ x_2^3 - 2x_2 = 0 \\ x_3^3 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(x_1^2 - 2) = 0 \\ x_2(x_2^2 - 2) = 0 \\ x_3(x_3^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \Rightarrow$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a} = -2.$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2 \cdot -2 = 4.$$

c) $$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3 - x_3^3 - x_1^3 - x_2^3 = -(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 3x_1x_2x_3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1^3 - 2x_1 = 0 \\ x_2^3 - 2x_2 = 0 \\ x_3^3 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 2(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0.$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = 0.$$

2. a) $h = (x^2 + 2x - 24)(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 + 2x^3 - 8x - 24x^2 + 96 =$

$$= x^4 + 2x^3 - 28x^2 - 8x + 96$$

b) $a, b = ?$ a.î. $f = h$.

$f = x^4 + ax^3 - 28x^2 + bx + 96$

$h = x^4 + 2x^3 - 28x^2 - 8x + 96$. $\Rightarrow a = 2$, $b = -8$

c) $16^x + 2\cdot 8^x - 28\cdot 4^x - 8\cdot 2^x + 96 = 0 \Leftrightarrow 2^{4x} + 2\cdot 2^{3x} - 28\cdot 2^{2x} - 8\cdot 2^x + 96 = 0$

$2^x = t > 0 \Rightarrow t^4 + 2t^3 - 28t^2 - 8t + 96 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t^2 + 2t - 24)(t^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 2t - 24 = 0 \\ t^2 - 4 = 0 \end{cases}$

$t^2 + 2t - 24 = 0$.

$\Delta = 4 + 96 = 100 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \pm 10}{2}$ $\Rightarrow t_1 = 4 > 0$; $\Rightarrow t_2 = -6$, nu convine.

$\Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+2) = 0 \Rightarrow t_3 = 2 > 0$; $\Rightarrow t_4 = -2$ nu convine.

$\Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

## Subiectul III

1. $f : (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

a) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cancel{\ln x}\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - x\ln x}{2x^2\sqrt{x}} =$

$= \frac{x(2 - \ln x)}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ e.c.t.d.

b) $2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow 2 = \ln x \Leftrightarrow \ln e^2 = \ln x \Leftrightarrow x = e^2$.

| $x$ | $0$ | | | $e^2$ | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | | | $f(e^2)$ | | $\searrow$ | |

Pe intervalul $(0, e^2]$ funcția este crescătoare.
Pe intervalul $[e^2, +\infty)$ funcția este descrescătoare.

c) din b) => că $f(3) < f(5)$ deoarece pe $(0, e^2)$ funcția este crescătoare. => $\frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 5}{\sqrt{5}}$ =>

=> $\sqrt{5}\ln 3 < \sqrt{3}\ln 5$ => $\ln 3^{\sqrt{5}} < \ln 5^{\sqrt{3}}$ =>

=> $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$ (am eliminat ln deoarece avem și în partea stângă și în partea dreaptă)

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e\cdot e^x, & x \le -1 \\ 2+x, & x > -1 \end{cases}$

a) $l_s = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\le -1}} e\cdot e^x = e\cdot e^{-1} = e^0 = 1$

$l_d = \lim_{\substack{x\to -1\\ x> -1}} 2+x = 2-1 = 1.$

$f(-1) = 1.$

=> f este continuă în $x=-1$ => f cont. pe $\mathbb{R}$ => f are primitive pe $\mathbb{R}$

b) $V(C_g) = \pi\int_0^2 f^2(x)\,dx = \pi\int_0^2 g^2(x)\,dx = \pi\int_0^2 (2+x)^2\,dx =$

$= \pi\int_0^2 (4+4x+x^2)\,dx = \pi\left(4x + \frac{4x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 8+8+\frac{8}{3} = \frac{56}{3}\pi$

c) $\int_{-2}^{0} \frac{x f(x)}{e}\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{x\cdot \cancel{e}\cdot e^x}{\cancel{e}}\,dx + \int_{-1}^{0}\frac{(2+x)x}{e}\,dx = \int_{-2}^{-1} x e^x\,dx + \int_{-1}^{0}\frac{2x+x^2}{e}\,dx$

$\int_{-2}^{-1} x e^x\,dx = \int_{-2}^{-1} x(e^x)'\,dx = xe^x\Big|_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} e^x\,dx = -e^{-1}+2e^{-2} - e^{-1} + e^{-2} =$

$= -2e^{-1} + 3e^{-2}$

$I = -2e^{-1} + 3e^{-2} + \frac{1}{e}\left(\frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{2}{e} + \frac{3}{e^2} + \frac{1}{e}\left(-1+\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{e} + \frac{3}{e^2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{3e} =$

$= \frac{3}{e^2} + \frac{8}{3e} = \frac{1}{e}\left(\frac{3}{e} + \frac{8}{3}\right)$